المستوى: الثالث علوم تجريبية	فيفري 2021
اختبار في مادة الرياضيات	المدة:2 سا

التمرين الأول (6 ن):

1- لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \frac{9u_n - 49}{u_n - 5}$

أ- احسب الحدود : u_3, u_2, u_1

ب- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \neq 7$

2- نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على N كما يلي : $V_n = \frac{1}{u_n - 7}$

أ- بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n.

ج- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

د- احسب بدلالة n المجموع P_n حيث: $P_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + ... + u_n v_n$

التمرين الثاني (14ن):

I) g دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) استنتج إشارة $g(x)$

II) f دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) ا- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- ادرس وضعية المنحنى (c_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y = x - 1$

3) ا- بين أن من اجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) عند نقطة يطلب تعين إحداثياتها. اكتب معادلة (T) .

5) احسب $f(1)$, أنشئ كلا من (Δ) و (T) ثم المنحنى (c_f)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$2\ln x - x(m+1) = 0$$

بالتوفيق*

التصحيح النموذجي

التمرين الأول (6 ن):

أ- $u_1=13, u_2=\frac{17}{2}, u_3=\frac{55}{7}$

ب- البرهان بالتراجع

2 – ا- (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0=\frac{-1}{3}$

ب- $V_n=\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}n$, $u_n=\frac{1}{\frac{1}{2}n-\frac{1}{3}}+7$

ج – $S_n=\frac{n+1}{2}(\frac{1}{2}n-\frac{2}{3})$ و $P_n=n+1+\frac{7(n+1)(\frac{1}{2}n-\frac{2}{3})}{2}$.

التمرين الثاني (14ن):

ا-

$\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$

من اجل كل x من $\Re$: $g'(x)=\frac{2x^2-2}{x}$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0,1]$ و متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$.

2) إشارة $g(x)$: $g(x)\succ 0$

II.1) $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ المنحنى (c_f) يقبل محور التراتيب $(y=0)$ كمستقيم مقارب له

2) ا- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = 0$

المنحنى (c_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x-1$ بجوار $(+\infty)$

ب- لما $]0,1[$ $(c_f) : x \in$ يقع تحت (Δ)

لما $]1;+\infty[$ $(c_f) : x \in$ يقع فوق (Δ).

لما $x=1 :$ $(c_f) \cap (\Delta) = \{A(1.0)\}$.

3 $f'(x) \succ 0$ فالدالة f متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$

4) $x_0 = e$ و $(T)\, y = x - 1 + \frac{2}{e}$

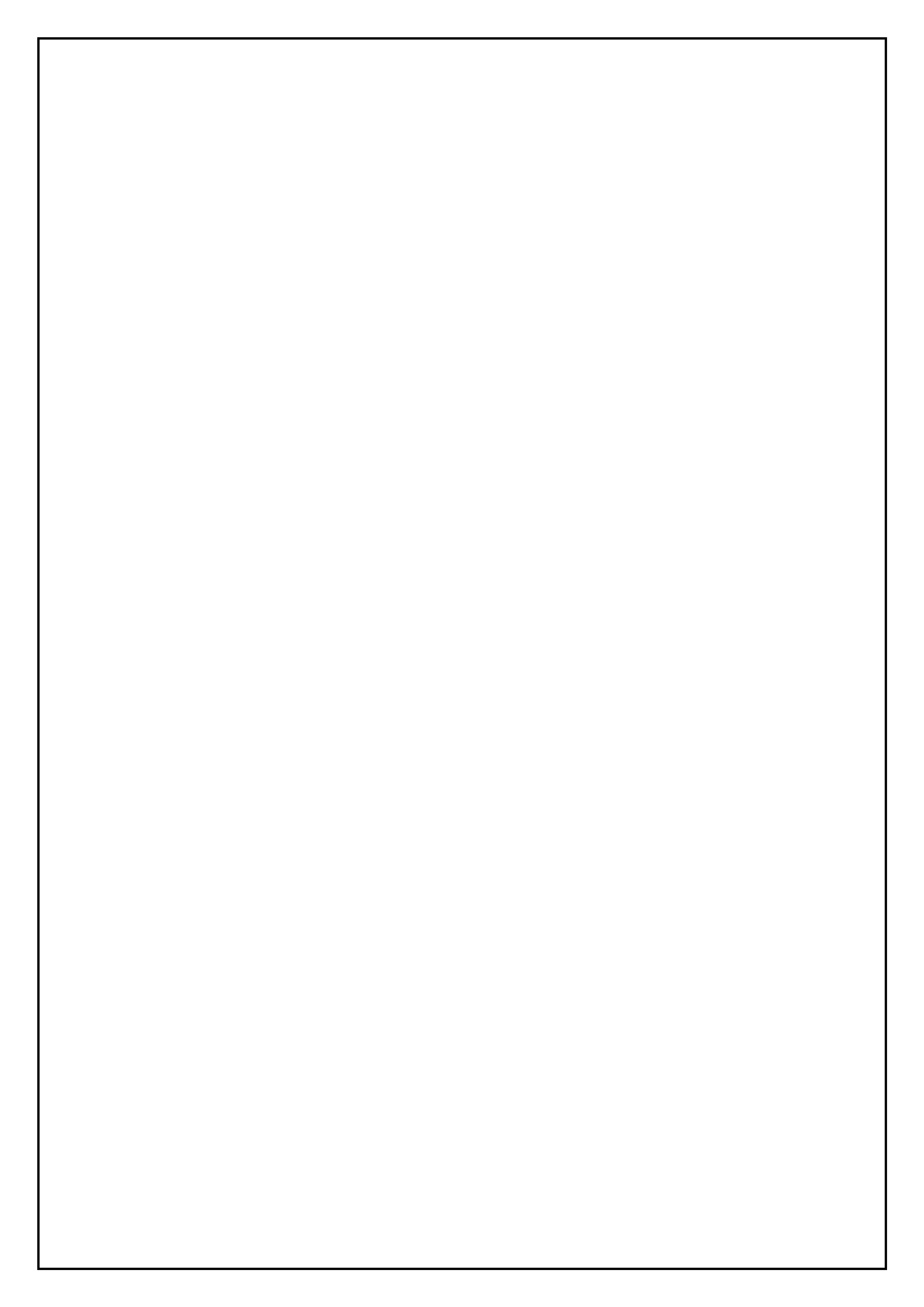
6) $f(x) = x + m$

لما $: m \in]-\infty, -1]$ يوجد حل وحيد

لما $: m \in \left]-1, -1+\frac{2}{e}\right[$ يوجد حلان

لما $: m = -1+\frac{2}{e}$ يوجد حل هو e

لما $: m \in \left]-1+\frac{2}{e}, +\infty\right[$ لا يوجد حلول



الموسم الدراسي: 2021/2020	اختبار الفصل الأول	الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)
المدة: ثلاث ساعات (3سا)		المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"
إعداد: عبد المطلب		المادة: رياضيات

تمرين1 (4نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 2 ، 3 وخمس كريات خضراء تحمل الأرقام 4 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5.(لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

1) A و B حادثتان حيث: A: "سحب كريتين إحداهما سوداء تحمل الرقم 2 والثانية لونها مختلف"، وB: "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما أكبر تماما من 3". بيّن أنّ $P(A)=\frac{4}{11}$ و $P(B)=\frac{19}{22}$ ، ثم استنتج حساب $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الرقم الأكبر بين رقمي الكرتين المسحوبتين، والرقم 6 إذا كانت الكريتان تحملان نفس الرقم.

أ) عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أنّ: $P(X=4)=\frac{7}{33}$ و $P(X=6)=\frac{1}{6}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3) نجري الآن n سحبة متتالية لكرية بحيث نعيد في كل مرة الكرية المسحوبة إلى الكيس.

أ) عبّر بدلالة العدد الطبيعي n الاحتمال P_n للحصول على الكريات البيضاء فقط ، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث يكون $P_n \geq 0{,}002$.

ب) احسب احتمال سحب كرية واحدة فقط بيضاء.

تمرين2 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+8}-4$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-3\leq u_n<-2$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n+4}$. استنتج اتّجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}+2\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0>u_n+2\geq-\left(2-\sqrt{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right)$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q=\frac{1}{4}$ ، يطلب كتابة حدّها العام بدلالة n.

ب) نضع $P_n=(u_0+4)\times(u_1+4)\times\ldots\times(u_n+4)$. بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $P_n=2^{2^{-n}+n-1}$.

تمرين3 (5نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. M نقطة لاحقتها العدد المركب z، حيث $z=x+iy$،

x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z حيث $z\neq -i$ العدد المركب Z: $Z=\dfrac{iz+5}{z+i}$.

1) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z=\dfrac{6x}{x^2+(y+1)^2}+i\,\dfrac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$.

2) عيّن وأنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3) عيّن وأنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، مع ذكر العناصر المميّزة لـE_2.

4) عيّن وأنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون طويلة $Z+i$ تساوي 2 بمعنى $|Z+i|=2$.

5) عيّن وأنشئ المجموعة E_4 للنقط M من المستوي بحيث يتحقّق $Z=\overline{z}$.

تمرين4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ: $g(x)=x(x-2-e^{-x})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ: $g'(x)=(x-1)(e^{-x}+2)$، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين، أحدهما معدوم والآخر α حيث $2{,}1<\alpha<2{,}2$. استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{e^{-x}+1}{x-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$. فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) ليكن (T) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة β. بيّن أنّ المماس (T) يشمل النقطة A حيث $A(1,0)$

إذا تحقّق: $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$. استنتج أنّ معادلة المماس (T) هي: $y=\dfrac{3+e}{4}(x-1)$.

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $f(-2)$، ثم ارسم المستقيم المقارب (Δ)، المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4) m وسيط حقيقي، ولتكن f_m الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f_m(x)=x+\dfrac{e^{-x}+m}{x-1}$ و$(\mathscr{C}_m)$ تمثيلها البياني.

أ) p و q عددين حقيقيين موجبين تماما حيث $p<q$. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_p)$ و $(\mathscr{C}_q)$.

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m هي حل للمعادلة التفاضلية: $(x-1)y'+x(y-1)=x^2$.

تصحيح إختبار الفصل الأول 2021م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $P(A) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{11}$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_2^1 C_4^1 + C_2^2}{C_{12}^2} = 1 - \frac{3}{22} = \frac{19}{22}$

أو $P(B) = \frac{C_{10}^2 + C_2^1 \times C_{10}^1}{C_{12}^2}$ (أعسر)

2) أ) $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X=4) = \frac{C_2^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{33}$

$P(X=6) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_2^2 + C_3^2}{66} = \frac{1}{6}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B) - \frac{C_3^1 \times C_1^1}{66} = \frac{21}{22}$

أو: $P(A\cap B) = 1 - \frac{3}{66}$

ب) قانون الاحتمال للمتغير X:

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = 2\times\frac{4}{33} + \frac{3}{11} + 4\times\frac{7}{33} + 5\times\frac{9}{22} + \frac{6}{6} = \frac{97}{22} = 4,409$

3) أ) $P_n = \frac{3^n}{12^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$P_n \geq 0,002$ يعني: $\frac{1}{4^n} \geq 0,002$ ، أي $4^n \leq 500$

$\ln 4^n \leq \ln 500$ ، $n \leq \frac{\ln 500}{\ln 4}$ ، $n \leq 4,48$

ومنه: $n = 4$

ب) $P = n.\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أو: $P = n\left(\frac{1^1 \times 3^{n-1}}{12^n}\right) = n\left(\frac{3^{n-1}}{4^n}\right)$

تمرين 2:

1) أ) $n=0$: $u_0 = -3$ ومنه $-3 \leq u_0 < -2$ (محققة)

نفرض أن: $-3 \leq u_n < -2$ ونبرهن صحة: $-3 \leq u_{n+1} < -2$

لدينا: $-3 \leq u_n < -2$ ، $-6 \leq 2u_n < -4$ ،

$2 \leq 2u_n + 8 < 4$ ؛ $\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2$

$\sqrt{2} - 4 \leq \sqrt{2u_n+8} - 4 < -2$ و $-3 \leq \sqrt{2} - 4$

ومنه: $-3 \leq u_{n+1} < -2$ إذن $-3 \leq u_n < -2 : \forall n \in \mathbb{N}$

ب) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n+8} - 4 - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+8} - 4 - u_n)(\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n)}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 8 - (4+u_n)^2}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n} = \frac{2(u_n+4) - (u_n+4)^2}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n}$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n} > 0$

لأن: $-3 \leq u_n < -2$ ومنه: $1 \leq u_n + 4 < 2$ (موجب)

و: $-1 \leq u_n + 2 < 0$ (سالب)

إذن (u_n) متزايدة تماما.

u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

2) أ) لدينا: $u_{n+1} + 2 = \sqrt{2u_n+8} - 2 = \frac{(\sqrt{2u_n+8} - 2)(\sqrt{2u_n+8} + 2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2}$

$u_{n+1} + 2 = \frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2}$

إذن: $u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$ تكافئ:

$\frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$ ($u_n + 2 < 0$)

أي: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$

لدينا سابقا: $\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2$ ومنه:

$2 + \sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} + 2 < 4$ وعند استعمال المقلوب ثم نضرب في 2.

$\frac{1}{2} < \frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}$

لدينا: $\frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$

ومنه: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$ أي $u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$

ب) $n=0$: $0 > u_0 + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^0$ أي $0 > -1 \geq -1$ (محققة)

نفرض أن: $0 > u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$

ونبرهن صحة: $0 > u_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$

لدينا: $(2-\sqrt{2}) \times \left[0 > u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n\right]$

$0 > (2-\sqrt{2})(u_n+2) \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$

وبما أن: $u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$

ومنه: $0 > u_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$.

إذن $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 > u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$

لدينا: $-1 < 2 - \sqrt{2} < 1$ ومنه: $\lim_{n \to +\infty} (2-\sqrt{2})^n = 0$

باستعمال مبرهنة الحصر: $\lim_{n \to +\infty} (u_n + 2) = 0$

ومنه: $\lim_{n \to +\infty} u_n = -2$

3) أ) $v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_{n+1}+4}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{2u_n+8}}{2}\right)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2 \times 2^n} \ln\left(\frac{2u_n+8}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right) = \frac{1}{4} v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و $v_0 = -\ln 2$

$v_n = v_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب) $\ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right) = 2^n v_n$ ومنه: $(u_n + 4) = 2e^{2^n v_n}$

$(u_n + 4) = 2e^{2^n \left(\frac{-\ln 2}{4^n}\right)} = 2\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}$

$P_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0}} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^1}} \times \dots \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n}}$

$f'(x)=\frac{x^2-2x-xe^{-x}}{(x-1)^2}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$

f متزايدة تماما على: $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$

f متناقصة تماما على: $x\in]0;1[\cup]1;\alpha[$.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ب) $y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$ ؛ يشمل $A(1;0)$

$$0=\frac{\beta^2-2\beta-\beta e^{-\beta}}{(\beta-1)^2}(1-\beta)+\beta+\frac{e^{-\beta}+1}{\beta-1}$$

$$\frac{-\beta^2+2\beta+\beta e^{-\beta}+e^{-\beta}+1}{\beta-1}+\beta=0$$

$\frac{\beta+\beta e^{-\beta}+e^{-\beta}+1}{\beta-1}=0$ ومنه: $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$

ومنه $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$ إذا كان $\beta=-1$ لأن $e^{-\beta}+1>0$

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=\frac{3+e}{4}(x+1)-\frac{3+e}{2}=\frac{3+e}{4}(x-1)$$

3) أ) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه: $e^{-\alpha}=\alpha-2$ ولدينا: $f(\alpha)=\alpha+\frac{e^{-\alpha}+1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\alpha+\frac{\alpha-2+1}{\alpha-1}=\alpha+1$$

$2,1<\alpha<2,2$ ؛ $3,1<\alpha+1<3,2$ ومنه: $3,1<f(\alpha)<3,2$

ب) $f(-2)\simeq-4,8$

4) أ) $f_p(x)-f_q(x)=x+\frac{e^{-x}+p}{x-1}-x-\frac{e^{-x}+q}{x-1}$

$$f_p(x)-f_q(x)=\frac{p-q}{x-1}$$

لما $p<q$ ومنه $(p-q)<0$.

لما $x<1$: (C_p) أعلى (C_q) ولما $x>1$: (C_p) أسفل (C_q)

ب) $(x-1)f'_m(x)+x(f_m(x)-1)=x^2$

$$(x-1)\left(1+\frac{-xe^{-x}-m}{(x-1)^2}\right)+x\left(x-1+\frac{e^{-x}+m}{x-1}\right)=x^2$$

$$x-1+\frac{-xe^{-x}-m}{x-1}-x+\frac{xe^{-x}+mx}{x-1}=0$$

$$-1+\frac{m(x-1)}{x-1}=0$$

$m-1=0$ ومنه $m=1$

"عبد المطلب"

$$P_n=2^{n+1}\left(\frac12\right)^{\frac{1-(\frac12)^{n+1}}{1-\frac12}}=2^{n+1}\left(\frac12\right)^{2-2^{-n}}=2^{n-1+2^{-n}}$$

تمرين 3:

1) $Z=\frac{iz+5}{z+i}=\frac{i(x+iy)+5}{x+iy+i}=\frac{-y+5+ix}{x+i(y+1)}$

$$Z=\frac{(-y+5+ix)(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))}=\frac{6x}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$$

2) Z تخيليا صرفا إذا كان: $6x=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$

ومنه E_1 مستقيم معادلته $x=0$ ماعدا $(0;-1)$

3) Z حقيقيا لما: $x^2+y^2-4y-5=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$

$(x-0)^2+(y-2)^2=9$. ومنه E_2 دائرة مركزها $\Omega(0;2)$ ونصف قطرها $r=3$ باستثناء النقطة $(0;-1)$.

4) $|Z+i|=\left|\frac{iz+5}{z+i}+i\right|=\left|\frac{2iz+4}{z+i}\right|=2\left|\frac{iz+2}{z+i}\right|$

إذن: $|Z+i|=2$ لما: $\left|\frac{iz+2}{z+i}\right|=1$ أي: $|iz+2|=|z+i|$

$$|-y+2+ix|=|x+i(y+1)|$$

$$(-y+2)^2+x^2=x^2+(y+1)^2$$

ومنه: $6y=3$. E_3 مستقيم معادلته $y=\frac12$

5) $Z=\bar z$ أي: $\frac{iz+5}{z+i}=\bar z$

$$z\bar z+i(\bar z-z)-5=0$$

$$(x-0)^2+(y+1)^2=6$$

E_4 دائرة مركزها $\Omega'(0;-1)$ ونصف قطرها $r'=\sqrt6$.

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}[x(x-2-e^{-x})]=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}[x(x-2-e^{-x})]=+\infty$

2) $g'(x)=(x-2-e^{-x})+(1+e^{-x})x=2x-2+e^{-x}(x-1)$

$g'(x)=(x-1)(e^{-x}+2)$. إشارتها من إشارة $(x-1)$ لأن $(e^{-x}+2)>0$

3) $g(0)=0$ ولدينا g مستمرة ومتزايدة، $g(2,2)\simeq0,2>0$. $g(2,1)\simeq-0,05<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,1<\alpha<2,2$.

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$			0		
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	$-1-\frac1e$	↗ 0	$+\infty$

إشارة $g(x)$: + 0 − α +

II 1) أ) $\lim_{x\to1^{<}}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to1^{>}}f(x)=+\infty$

(C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$.

ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^{-x}+1}{x-1}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x\left(-\frac{e^{-x}}{-x}+\frac1x\right)}{x\left(1-\frac1x\right)}\right]=-\infty$

جـ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-1}{x-1}=0$

(C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$ عند $+\infty$

2) أ) $f'(x)=1+\frac{-e^{-x}(x-1)-e^{-x}-1}{(x-1)^2}$



المستوى:الثالثة علوم تجريبية **ديسمبر 2021**

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات **المدة : ساعتين.**

التمرين 1 (6 ن)

توجد اجابة واحدة صحيحة لكل حالة حددها مع التعليل.

1) حل المعادلة $4\,e^{2x} - e^{x} - 3 = 0$ في $\mathbb{R}$ هو :

أ) 2 ب) 0 ج) 1

2) حل المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$ الذي يحقق $f(0) = 1$ هو الدالة f حيث :

أ) $-e^{-3x}$ ب) e^{-3x} ج) e^{3x}

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} - (x+1)e^{x}$ هي :

أ) $+\infty$ ب) $-\infty$ ج) 0

التمرين 2 (14 ن)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

2) بين ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته.

3) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = g(x)$

4) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) بين ان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث :

$-3.5 < \alpha < -3$ و $0.5 < \beta < 1$

6) ارسم (Δ) و (C_f).

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة

$$3 - xe^{2x} - m = 0$$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن $h(x)=f(\frac{1}{x})$

ب) احسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	1) حل المعادلة $4\,e^{2x}-e^{x}-3=0$ في $\mathbb{R}$ هو : ب) 1 2) حل المعادلة التفاضلية $y'+3y=0$ الذي يحقق $f(0)=1$ هو الدالة f حيث : ب) e^{-3x} 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-(x+1)e^{x}$ هي : ب) $-\infty$	**التمرين 1**

أ-) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

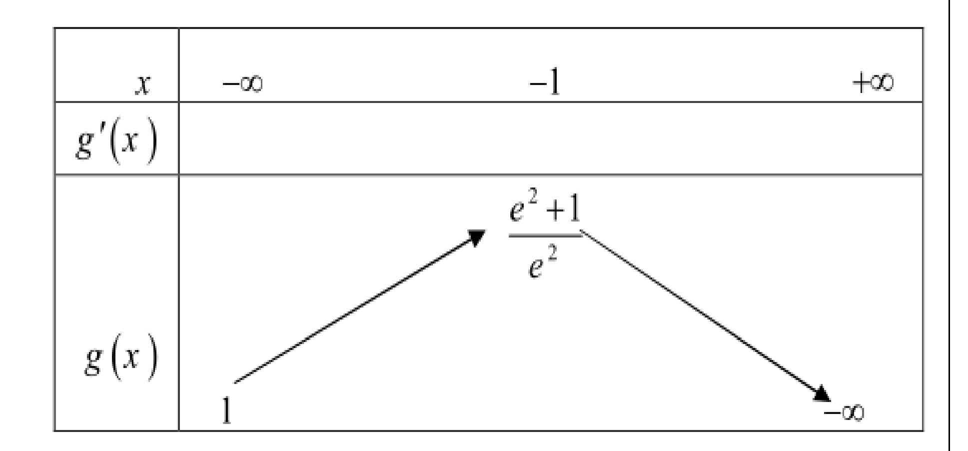
ب) دراسة اتجاه تغيرات g و تشكيل جدول التغيرات:

$$g'(x) = (-4x - 4)e^{2x}$$

x	$-\infty$				-1				$+\infty$
$g(x)$		+	+	+	0	-	-	-	

* من جدول الإشارة نستنتج أن: g متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و متناقصة تماما على $[-1;+\infty[$.

جدول التغيرات:



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$	1 ↗	$\frac{e^2+1}{e^2}$	↘ $-\infty$

2) $g(0) = 0$.

جدول إشارة $g(x)$

x	$-\infty$			0			$+\infty$
إشارة $g(x)$	+	+	+	0	-	-	-

3) $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.

أ) النهايات: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ب) بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (□) معادلته $y=x+3$ عند $(-\infty)$.

4) لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (□) ندرس إشارة الفرق $D(x)=f(x)-y=-xe^{2x}$ حسب الجدول:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $D(x)$		+ + +	0	- - -	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (□)	يقطع $A(0;3)$	(C_f) يقع تحت (□)	

5-أ) $f'(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}=g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب) f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$+\infty$

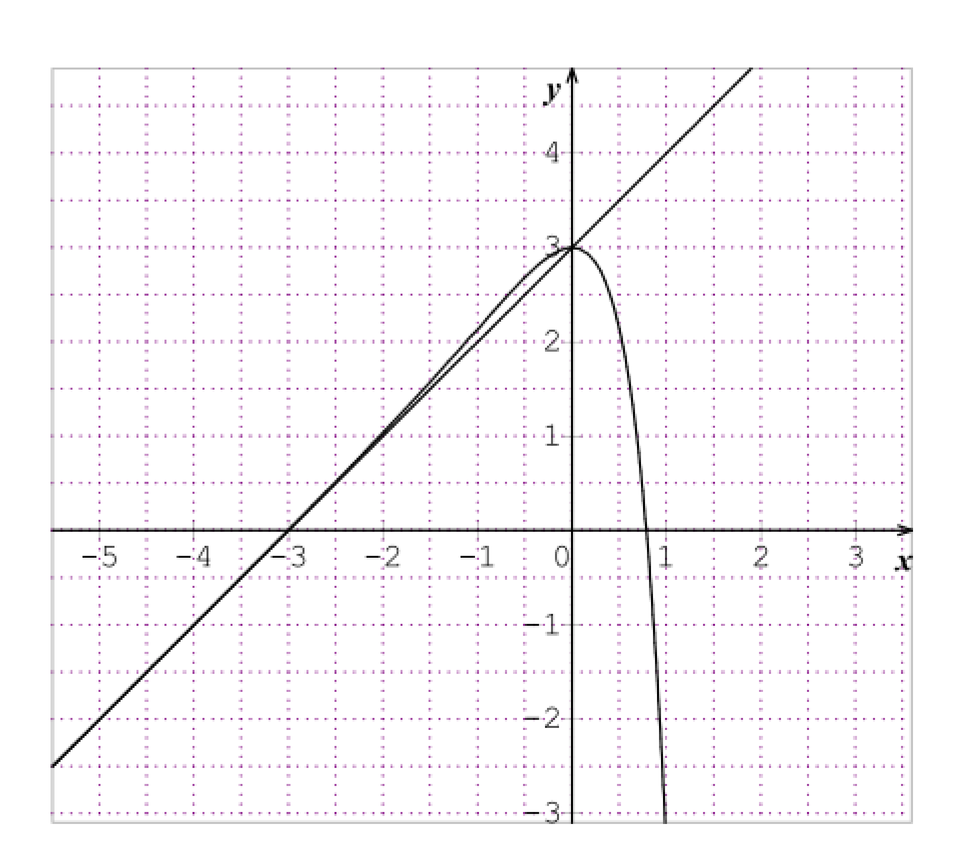
6) بما أن f مستمرة و متزايدة تماما على $[-3.5;-3]$ و $f(-3.5).f(-3)<0$ و بما أن f مستمرة و متناقصة تماما على $[0.5;1]$ و $f(0.5).f(1)<0$.

فإنه يوجد عددان حقيقيان α و β وحيدان من $]-3.5;-3[$ و $]0.5;1[$ على الترتيب بحيث: $f(\alpha)=0$

و $f(\beta)=0$ و ذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

وعليه المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $A(\alpha;0)$ و $B(\beta;0)$.

7) رسم (Δ) و (C_f)



8) $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

أ) من أجل $x \neq 0$ لدينا : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ب) $h'(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ أي: $h'(x) = -\frac{1}{x^2}.g\left(\frac{1}{x}\right)$.

جدول إشارة $h'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	- - - -		+ + + +

من جدول إشارة $h'(x)$ نستنتج أن h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	- - -		+ +
$h(x)$	3 ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ 3

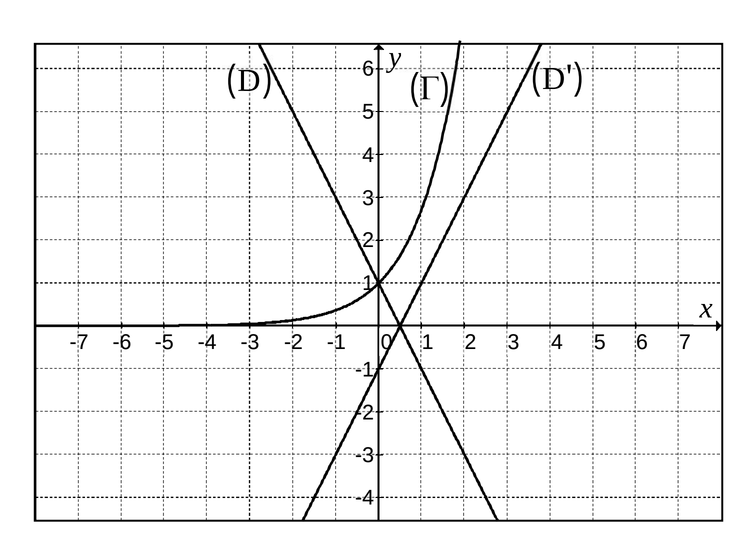
الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)
المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"
المادة: رياضيات



الموسم الدراسي: 2023/2022م
المدة: (2سا 30د)
إعداد: عبد المطلب

مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

تمرين1 (9نقاط)



I- في الشكل المقابل (Γ)، (D) و (D') على الترتيب التمثيلات البيانية للدوال العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto -2x+1$ و $x \mapsto 2x-1$.

u و v الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=e^x+2x-1$ و $v(x)=e^x-2x+1$.

1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x وضعية (Γ) بالنسبة لكل من المستقيمين (D) و (D').

2) استنتج إشارة كل من $u(x)$ و $v(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، ثم فسّر هاتين النهايتين هندسيا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=1$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{2(-2x+3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها. (اعتبر $f\left(\dfrac{3}{2}\right)\simeq 2{,}6$)

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم فسّر هذه النهاية هندسيا.

ب) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند المبدأ O .

4) أ) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الرسم $2cm$)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m $(m\neq 0)$ التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x)=\dfrac{x}{m}$ ثلاثة حلول متمايزة، أحدهم فقط سالب تماما.

5) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2f(x)$.

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g .

III- f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=\dfrac{e^x-2kx+k}{e^x-2x+1}$. حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathscr{C}_k)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathscr{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة I (مستقلة عن k) يطلب تعيين إحداثيتيها.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f_k'(x)=\dfrac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$ ، ثم ادرس اتّجاه تغيّر f_k من أجل $k<1$ و $k>1$.

3) عيّن قيمة k_0 التي من أجلها المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}_{k_0})$ متناظران بالنسبة للمستقيم (d)، وارسم $(\mathscr{C}_{k_0})$ في المعلم السابق.

اقلب الورقة

تمرين2 (8نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,20 < \alpha < 2,21$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ضع $t = \sqrt{x}$).

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$، حيث $(\mathscr{C}')$ هو محني الدالة: $x \mapsto \sqrt{x}$.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \sqrt{x} \right)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

4) أ) بيّن أنّ $f(\alpha) = \dfrac{2(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته $0,01$.

ب) بيّن أنّه توجد فاصلة وحيدة x_0 حيث المماس لـ $(\mathscr{C})$ والمماس لـ $(\mathscr{C}')$ عند x_0 متوازيان.

5) أ) أنشئ المماس (Δ) لـ $(\mathscr{C})$ عند 1، والمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ في المعلم نفسه.(نأخذ $f(\alpha) \simeq 1,6$)

ب) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، وجود وعدد حلول المعادلة: $f(x) = -x + m^2$.

6) h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\alpha}{2}\right\}$ بـ: $h(x) = f\left(\left|2x - \alpha\right|\right)$.

أ) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة h على المجال $\left]\dfrac{\alpha}{2};+\infty\right[$. (النهايات غير مطلوبة)

ب) بيّن أنّ $x = \dfrac{\alpha}{2}$ ، هي معادلة لمحور تناظر المنحني الممثل للدالة h ، ثم شكّل جدول تغيرات h.

تمرين3 (3نقاط)

g الدالة المعرّفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{g(x)}{x+1}$ ، حيث $f(0) = 1$.

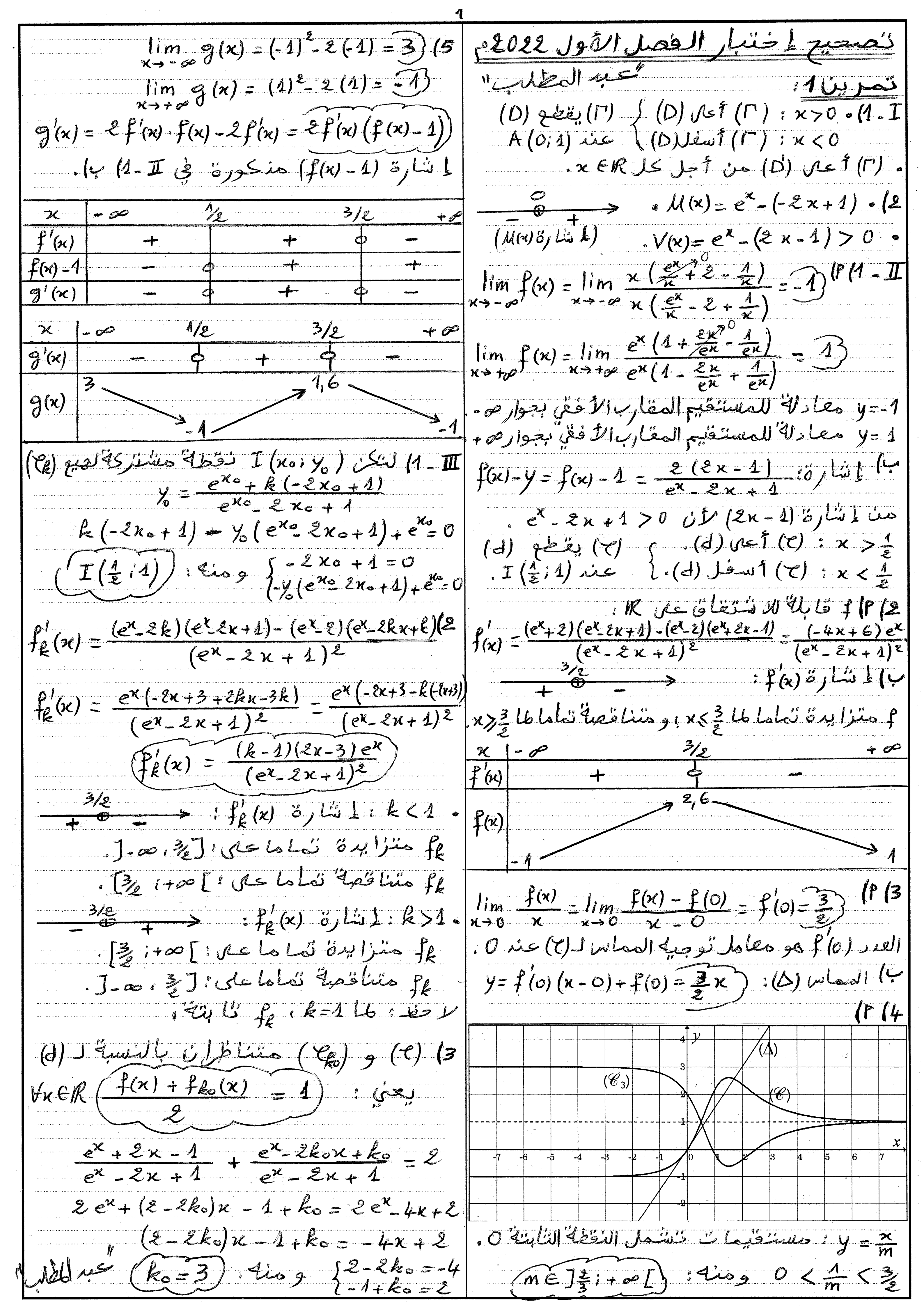
نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين: $y' - y = 0$ ... (E) و $y' - y = -\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ ... (F) .

1) احسب $g(0)$ ، ثم عيّن عبارة $g(x)$ إذا علمت أنّ g حل للمعادلة التفاضلية (E).

2) عيّن عبارة $f(x)$ ، ثم بيّن أنّ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (F).

3) عيّن الحل h للمعادلة التفاضلية $y' - y = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ ، إذا علمت أنّ $h(0) = 0$.

بالتوفيق



تصحيح اختبار الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

I-1) • $x>0$: (Γ) أعلى (D) ، $x<0$: (Γ) أسفل (D) ؛ (Γ) يقطع (D) عند $A(0;1)$

• (Γ) أعلى (D') من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) • $M(x)=e^x-(-2x+1)$ ، إشارة $M(x)$: $-$ 0 $+$

• $V(x)=e^x-(2x-1)>0$.

II-1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{e^x}{x}+2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2+\frac{1}{x}\right)}=-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}=1$

$y=-1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $-\infty$.

$y=1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $+\infty$.

ب) إشارة: $f(x)-y=f(x)-1=\frac{2(2x-1)}{e^x-2x+1}$

من إشارة $(2x-1)$ لأن $e^x-2x+1>0$.

$x>\frac{1}{2}$: (C) أعلى (d).
$x<\frac{1}{2}$: (C) أسفل (d).
(C) يقطع (d) عند $I(\frac{1}{2};1)$.

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+2)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x+2x-1)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{(-4x+6)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f متزايدة تماما لما $x\le\frac{3}{2}$ ، ومتناقصة تماما لما $x\ge\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$2,6$	↘	1

3) أ) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{3}{2}$

العدد $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس لـ (C) عند 0.

ب) المماس (Δ): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{3}{2}x$

4) أ)

ب) $y=\frac{x}{m}$: مستقيمات تشمل النقطة الثابتة O.

ومنه: $0<\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$: $m\in\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$

5) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=(-1)^2-2(-1)=3$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=(1)^2-2(1)=-1$

$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)-2f'(x)=2f'(x)(f(x)-1)$

إشارة $(f(x)-1)$ مذكورة في II-1) ب).

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	↘	-1	↗	$1,6$	↘	-1

III-1) لتكن $I(x_0;y_0)$ نقطة مشتركة لجميع (C_k)

$$y_0=\frac{e^{x_0}+k(-2x_0+1)}{e^{x_0}-2x_0+1}$$

$$k(-2x_0+1)-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0$$

$\begin{cases}-2x_0+1=0\\-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0\end{cases}$ ومنه: $I(\frac{1}{2};1)$

2) $f'_k(x)=\frac{(e^x-2k)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x-2kx+k)}{(e^x-2x+1)^2}$

$f'_k(x)=\frac{e^x(-2x+3+2kx-3k)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{e^x(-2x+3-k(-2x+3))}{(e^x-2x+1)^2}$

$$f'_k(x)=\frac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

• $k<1$: إشارة $f'_k(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f_k متزايدة تماما على: $]-\infty;\frac{3}{2}]$.

f_k متناقصة تماما على: $[\frac{3}{2};+\infty[$.

• $k>1$: إشارة $f'_k(x)$: $-$ $\frac{3}{2}$ $+$

f_k متزايدة تماما على: $[\frac{3}{2};+\infty[$.

f_k متناقصة تماما على: $]-\infty;\frac{3}{2}]$.

لاحظ: لما $k=1$ ، f_k ثابتة.

3) (C) و (C_{k_0}) متناظران بالنسبة لـ (d)

يعني: $\forall x\in\mathbb{R}$ $\frac{f(x)+f_{k_0}(x)}{2}=1$

$$\frac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}+\frac{e^x-2k_0x+k_0}{e^x-2x+1}=2$$

$$2e^x+(2-2k_0)x-1+k_0=2e^x-4x+2$$

$$(2-2k_0)x-1+k_0=-4x+2$$

$\begin{cases}2-2k_0=-4\\-1+k_0=2\end{cases}$ ومنه: $k_0=3$

"عبد المطلب"

ب) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (𝒞) مع مستقيمات موازية لـ (Δ)، $m^2<3$ أي $-\sqrt3<m<\sqrt3$ لا يوجد حلول.
$m^2=3$ أي $m=\sqrt3$ أو $m=-\sqrt3$ يوجد حلا مضاعفا.
$m^2>3$ أي $]-\infty;-\sqrt3[\cup]\sqrt3;+\infty[$ يوجد حلان.

6) أ) $h(x)=f(2x-\alpha)$: $x>\frac{\alpha}{2}$ ؛ $h'(x)=2f'(2x-\alpha)$

$h'(x)=0$ لما $2x-\alpha=\alpha$ ومنه: $x=\alpha$.
$h'(x)>0$ ، $f'(2x-\alpha)>0$ ، $2x-\alpha>\alpha$ ومنه: $x>\alpha$
$h'(x)<0$ ، $f'(2x-\alpha)<0$ ، $0<2x-\alpha<\alpha$ ومنه: $\frac{\alpha}{2}<x<\alpha$
h متزايدة تماما لما $x\geq\alpha$ ومتناقصة تماما لما $\frac{\alpha}{2}<x\leq\alpha$

ب) من أجل $x\neq\frac{\alpha}{2}$: $\alpha-x\neq\frac{\alpha}{2}$ و $h(\alpha-x)=h(x)$
$x\neq\frac{\alpha}{2}$ ، $-x\neq-\frac{\alpha}{2}$ ومنه: $\alpha-x\neq\frac{\alpha}{2}$.
$h(\alpha-x)=f(|2(\alpha-x)-\alpha|)=f(|-2x+\alpha|)=f(|2x-\alpha|)=h(x)$

x	$-\infty$		0		$\alpha/2$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$x=\frac{\alpha}{2}$ محور تناظر يعني $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\alpha}{2}$ ؛ $x_1,x_2\in D_h$
إذا كان $x_1=\alpha$ ، $\frac{\alpha+x_2}{2}=\frac{\alpha}{2}$ ومنه: $x_2=0$.

تمرين 2:

I) 1) $\lim_{x\to0^+}g(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$
$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

2) $g'(x)=1+\frac1x=\frac{x+1}{x}>0$ ، ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

3) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ،
$g(2,21)\simeq0,003>0$ و $g(2,2)\simeq-0,01<0$
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,2<\alpha<2,21$.
إشارة $g(x)$: 0 ، $-$ ، α ، $+$

II) 1) $\lim_{x\to0^+}f(x)=0+\infty+\infty=+\infty$ ؛
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(t+\frac1t-\frac{\ln t^2}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(t+\frac1t-2\frac{\ln t}{t}\right)=+\infty$

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
لاحظ: $\left(\frac{\sqrt x}{x}=\frac{1}{\sqrt x}\right)$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt x}-\frac{1}{2x\sqrt x}-\frac{\frac{1}{\sqrt x}-\frac{\ln x}{2\sqrt x}}{x}$
$f'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt x}-\frac{2-\ln x}{2x\sqrt x}=\frac{x-3+\ln x}{2x\sqrt x}=\frac{g(x)}{2x\sqrt x}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: 0 ، $-$ ، α ، $+$
f متزايدة تماما لما $x\geq\alpha$ ومتناقصة تماما $0<x\leq\alpha$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أ) $f(x)-\sqrt x=\frac{1-\ln x}{\sqrt x}$: 0 ، $+$ ، e ، $-$
$x>e$: (𝒞) أسفل (Γ)
$0<x<e$: (𝒞) أعلى (Γ)
(𝒞) يقطع (Γ) عند $A(e;\sqrt e)$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt x}-\frac{\ln x}{\sqrt x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac1t-\frac{2\ln t}{t}\right)=0$
ومنه (Γ) يقارب (𝒞) بجوار $(+\infty)$.

4) أ) $f(\alpha)=\sqrt\alpha+\frac{1}{\sqrt\alpha}-\frac{\ln\alpha}{\sqrt\alpha}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ ،
أي $\alpha-3+\ln\alpha=0$ ، $\ln\alpha=3-\alpha$
$f(\alpha)=\sqrt\alpha+\frac1{\sqrt\alpha}-\frac{3-\alpha}{\sqrt\alpha}=\sqrt\alpha+\frac1{\sqrt\alpha}-\frac3{\sqrt\alpha}+\sqrt\alpha$
$f(\alpha)=2\sqrt\alpha-\frac2{\sqrt\alpha}=\frac{2(\alpha-1)}{\sqrt\alpha}$
$2,2<\alpha<2,21$ ؛ $1,2<\alpha-1<1,21$ ؛ $2,4<2(\alpha-1)<2,42$
$\sqrt{2,2}<\sqrt\alpha<\sqrt{2,21}$ ؛ $\frac1{\sqrt{2,21}}<\frac1{\sqrt\alpha}<\frac1{\sqrt{2,2}}$ ؛
$\frac{2,4}{\sqrt{2,21}}<\frac{2(\alpha-1)}{\sqrt\alpha}<\frac{2,42}{\sqrt{2,2}}$ ومنه: $1,62<f(\alpha)<1,63$

ب) $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ؛ $\frac{x_0-3+\ln x_0}{2x_0\sqrt{x_0}}=\frac1{2\sqrt{x_0}}$
$-3+\ln x_0=0$ ومنه: $x_0=e^3$

5) أ) (Δ): $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-x+3$

تمرين 3:

1) $g(x)=(x+1)f(x)$ ومنه: $g(0)=f(0)=1$
حل (E) هو: $x\mapsto Ce^x$ ، $C\in\mathbb{R}$ (الحل العام)
بما أن $g(0)=1$ إذن: $Ce^0=1$ ؛ أي $C=1$
ومنه: $g(x)=e^x$

2) لدينا: $f(x)=\frac{g(x)}{x+1}=\frac{e^x}{x+1}$.
$f'(x)=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$
f حل لـ (F) يعني: $f'-f=\frac{-e^x}{(x+1)^2}$.
$f'(x)-f(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}-\frac{e^x}{(x+1)}=\frac{-e^x}{(x+1)^2}$ (محققة)

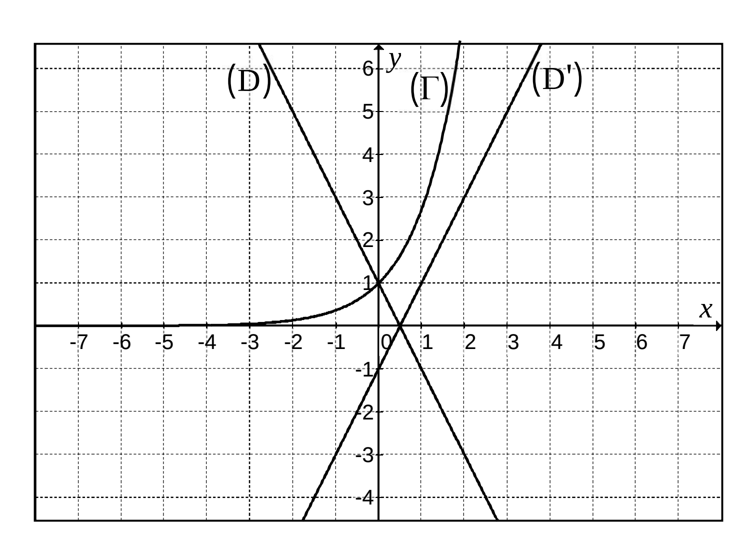
3) $\begin{cases}h'-h=\frac{e^x}{(x+1)^2}\\ f'-f=-\frac{e^x}{(x+1)^2}\end{cases}$ بالجمع نجد: $(h+f)'-(h+f)=0$ ومنه: $h+f$ حل لـ (E).
$h(x)+f(x)=Ce^x$ إذن: $h(x)=Ce^x-f(x)$
$h(0)=0$ ، $C=1$ ومنه: $h(x)=\frac{xe^x}{x+1}$

"عبد المطلب"

الموسم الدراسي: 2023/2022م	اختبار	الثانوية الخاصة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)
المدة: (2سا 30د)	الفصل الأول	المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"
إعداد: عبد المطلب		المادة: رياضيات



تمرين 1 (9نقاط)



I- في الشكل المقابل (Γ)، (D) و (D') على الترتيب التمثيلات البيانية للدوال العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto -2x+1$ و $x \mapsto 2x-1$.

u و v الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=e^x+2x-1$ و $v(x)=e^x-2x+1$.

1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x وضعية (Γ) بالنسبة لكل من المستقيمين (D) و (D').

2) استنتج إشارة كل من $u(x)$ و $v(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، ثم فسّر هاتين النهايتين هندسيا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=1$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{2(-2x+3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها. (اعتبر $f\left(\dfrac{3}{2}\right)\simeq 2,6$)

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$، ثم فسّر هذه النهاية هندسيا.

ب) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند المبدأ O.

4) أ) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الرسم $2cm$)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m $(m\neq 0)$ التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x)=\dfrac{x}{m}$ ثلاثة حلول متمايزة، أحدهم فقط سالب تماما.

5) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2f(x)$.

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

III- f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=\dfrac{e^x-2kx+k}{e^x-2x+1}$. حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathscr{C}_k)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathscr{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة I (مستقلة عن k) يطلب تعيين إحداثيتها.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f_k'(x)=\dfrac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$ ، ثم ادرس اتّجاه تغيّر f_k من أجل $k<1$ و $k>1$.

3) عيّن قيمة k_0 التي من أجلها المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}_{k_0})$ متناظران بالنسبة للمستقيم (d)، وارسم $(\mathscr{C}_{k_0})$ في المعلم السابق.

تمرين2 (8نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,20<\alpha<2,21$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة، ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ضع $t=\sqrt{x}$).

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$، حيث $(\mathscr{C}')$ هو محني الدالة: $x\mapsto\sqrt{x}$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

4) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 0,02.

ب) بيّن أنّه توجد فاصلة وحيدة x_0 حيث المماس لـ $(\mathscr{C})$ والمماس لـ $(\mathscr{C}')$ عند x_0 متوازيان.

5) أ) أنشئ المماس (Δ) لـ $(\mathscr{C})$ عند 1، والمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ في المعلم نفسه.(نأخذ $f(\alpha)\simeq 1,6$)

ب) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، وجود وعدد حلول المعادلة: $f(x)=-x+m^2$.

6) h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\alpha}{2}\right\}$ بـ: $h(x)=f\left(|2x-\alpha|\right)$.

أ) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة h على المجال $\left]\dfrac{\alpha}{2};+\infty\right[$. (النهايات غير مطلوبة)

ب) بيّن أنّ $x=\dfrac{\alpha}{2}$ ، هي معادلة لمحور تناظر المنحني الممثل للدالة h ، ثم شكّل جدول تغيرات h.

تمرين3 (3نقاط)

g الدالة المعرّفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{g(x)}{x+1}$ ، حيث $f(0)=1$.

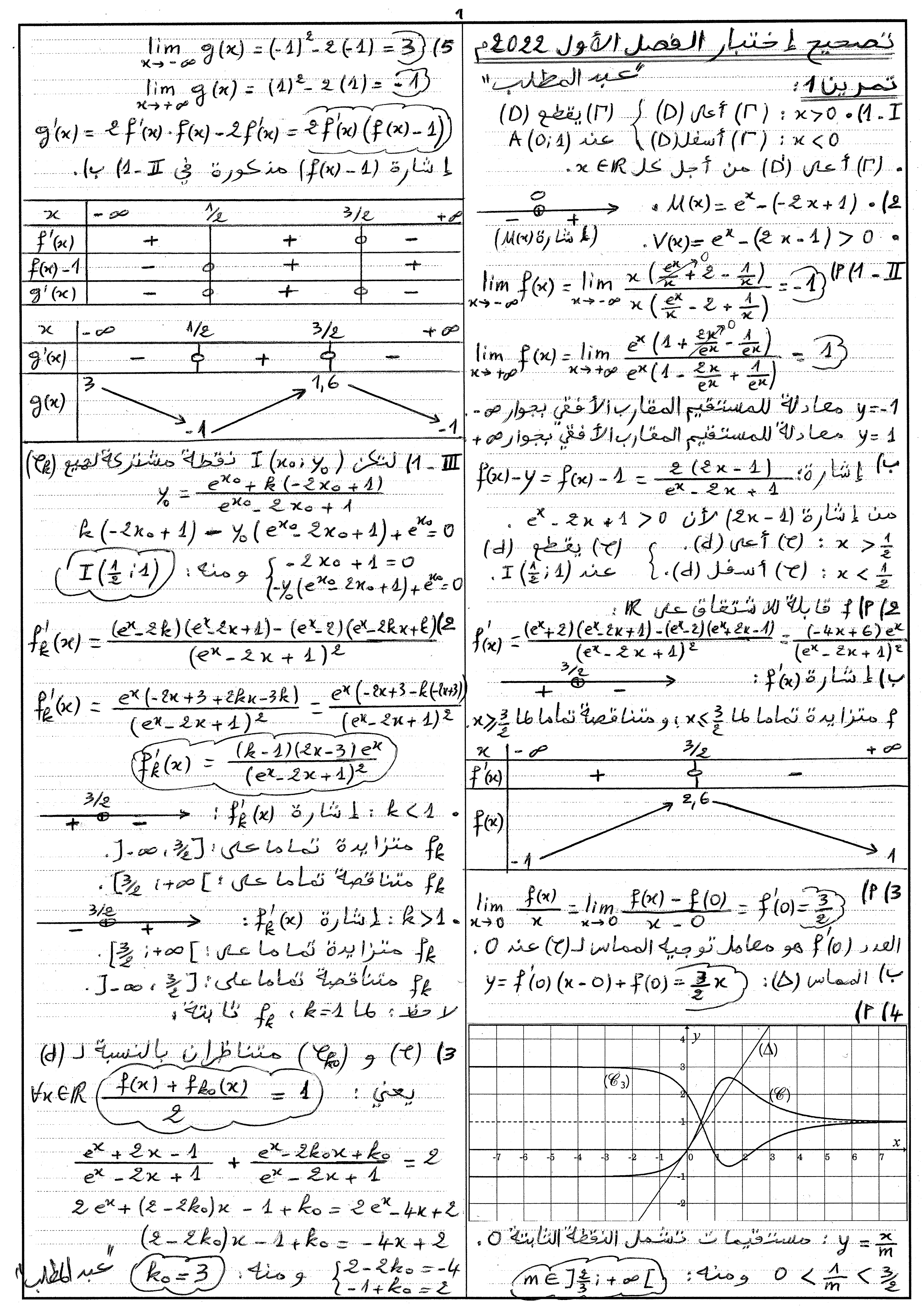
نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين: $y'-y=0$ ... (E) و $y'-y=-\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ ... (F) .

1) احسب $g(0)$ ، ثم عيّن عبارة $g(x)$ إذا علمت أنّ g حل للمعادلة التفاضلية (E).

2) عيّن عبارة $f(x)$ ، ثم بيّن أنّ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (F).

3) عيّن الحل h للمعادلة التفاضلية $y'-y=\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ ، إذا علمت أنّ $h(0)=0$.

بالتوفيق



تصحيح إختبار الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

I-1) • $x>0$: (Γ) أعلى (D) ؛ $x<0$: (Γ) أسفل (D) ؛ (Γ) يقطع (D) عند $A(0;1)$

• (Γ) أعلى (D') من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) • $M(x)=e^x-(-2x+1)$ ؛ إشارة $M(x)$: $-$ 0 $+$

• $V(x)=e^x-(2x-1)>0$.

II-1) أ)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{e^x}{x}+2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2+\frac{1}{x}\right)}=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

$y=-1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $-\infty$.

$y=1$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي بجوار $+\infty$.

ب) إشارة: $f(x)-y=f(x)-1=\dfrac{2(2x-1)}{e^x-2x+1}$

من إشارة $(2x-1)$ لأن $e^x-2x+1>0$.

$x>\frac{1}{2}$: (C) أعلى (d). ؛ $x<\frac{1}{2}$: (C) أسفل (d). ؛ (C) يقطع (d) عند $I(\frac{1}{2};1)$.

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:
$$f'(x)=\frac{(e^x+2)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x+2x-1)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{(-4x+6)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f متزايدة تماما لما $x\leq\frac{3}{2}$ ، ومتناقصة تماما لما $x\geq\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$2,6$	↘	1

3) أ) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{3}{2}$

العدد $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس لـ (C) عند 0.

ب) المماس (Δ) : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{3}{2}x$

4) أ)

• $y=\frac{x}{m}$: مستقيمات تشمل النقطة الثابتة O.

ومنه: $0<\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$ ؛ $m\in]\frac{2}{3};+\infty[$

5) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=(-1)^2-2(-1)=3$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=(1)^2-2(1)=-1$

$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)-2f'(x)=2f'(x)(f(x)-1)$

إشارة $(f(x)-1)$ مذكورة في II-1 ب).

x	$-\infty$	$1/2$		$3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)-1$	$-$	0	$+$		$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	↘	-1	↗	$1,6$	↘	-1

III-1) لتكن $I(x_0;y_0)$ نقطة مشتركة لجميع (C_k)

$$y_0=\frac{e^{x_0}+k(-2x_0+1)}{e^{x_0}-2x_0+1}$$
$$k(-2x_0+1)-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0$$
$$\begin{cases}-2x_0+1=0\\ -y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0\end{cases}$$ ومنه: $I(\frac{1}{2};1)$

2)
$$f'_k(x)=\frac{(e^x-2k)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x-2kx+k)}{(e^x-2x+1)^2}$$
$$f'_k(x)=\frac{e^x(-2x+3+2kx-3k)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{e^x(-2x+3-k(-2x+3))}{(e^x-2x+1)^2}$$
$$f'_k(x)=\frac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

• $k<1$: إشارة $f'_k(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f_k متزايدة تماما على: $]-\infty;\frac{3}{2}]$.

f_k متناقصة تماما على: $[\frac{3}{2};+\infty[$.

• $k>1$: إشارة $f'_k(x)$: $-$ $\frac{3}{2}$ $+$

f_k متزايدة تماما على: $[\frac{3}{2};+\infty[$.

f_k متناقصة تماما على: $]-\infty;\frac{3}{2}]$.

لاحظ: لما $k=1$ ، f_k ثابتة.

3) (C) و (C_{k_0}) متناظران بالنسبة لـ (d)

يعني: $\forall x\in\mathbb{R}\quad \dfrac{f(x)+f_{k_0}(x)}{2}=1$

$$\frac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}+\frac{e^x-2k_0x+k_0}{e^x-2x+1}=2$$
$$2e^x+(2-2k_0)x-1+k_0=2e^x-4x+2$$
$$(2-2k_0)x-1+k_0=-4x+2$$
$$\begin{cases}2-2k_0=-4\\ -1+k_0=2\end{cases}$$ ومنه: $k_0=3$

"عبد المطلب"

تمرين 2:

I-1) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

2) $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$ ،

ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

3) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ؛

$g(2,2) \simeq -0,01 < 0$ و $g(2,21) \simeq 0,003 > 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,2 < \alpha < 2,21$.

4) إشارة $g(x)$: على $]0;\alpha[$: $-$ ، $g(\alpha)=0$ ، على $]\alpha;+\infty[$: $+$

II-1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \infty + \infty = +\infty$ ؛ $x=0$ م ع م

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{t\to +\infty}\left(t + \frac{1}{t} - \frac{\ln t^2}{t}\right)$

$= \lim_{t\to +\infty}\left(t + \frac{1}{t} - 2\frac{\ln t}{t}\right) = +\infty$

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$. لاحظ: $\left(\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-3+\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: على $]0;\alpha[$: $-$ ، على $]\alpha;+\infty[$: $+$

f متزايدة تماما لما $x \geq \alpha$ و متناقصة تماما $0 < x \leq \alpha$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أ) $f(x) - \sqrt{x} = \frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$: على $]0;e[$: $+$ ، عند e : 0 ، على $]e;+\infty[$: $-$

$x > e$: (C) أسفل (Γ) ؛ $0 < x < e$: (C) أعلى (Γ)

(C) يقطع (Γ) عند $A(e;\sqrt{e})$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{2\ln t}{t}\right) = 0$

ومنه (Γ) يقارب (C) بجوار $(+\infty)$.

4) أ) $f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ ،

أي $\alpha - 3 + \ln\alpha = 0$ ، $\ln\alpha = 3-\alpha$

$f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3-\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{3}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}$

$f(\alpha) = 2\sqrt{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

$2,2 < \alpha < 2,21$ ؛ $1,2 < \alpha - 1 < 1,21$ ؛ $2,4 < 2(\alpha-1) < 2,42$

$\sqrt{2,2} < \sqrt{\alpha} < \sqrt{2,21}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2,21}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{2,2}}$ ؛

$\frac{2,4}{\sqrt{2,21}} < \frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} < \frac{2,42}{\sqrt{2,2}}$ ومنه: $1,61 < f(\alpha) < 1,63$

ب) $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ، $\frac{x_0 - 3 + \ln x_0}{2x_0\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$-3 + \ln x_0 = 0$ ومنه: $x_0 = e^3$

5) أ) (Δ): $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -x + 3$

ب) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C) مع مستقيمات موازية لـ (Δ). $m^2 < 3$ أي $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ لا يوجد حلول.

$m^2 = 3$ أي $m = \sqrt{3}$ أو $m = -\sqrt{3}$ يوجد حلا مضاعفا.

$m^2 > 3$ أي $]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$ يوجد حلان.

6) أ) $h(x) = f(2x-\alpha)$: $x > \frac{\alpha}{2}$ ؛ $h'(x) = 2f'(2x-\alpha)$

$h'(x) = 0$ لما $2x - \alpha = \alpha$ ومنه: $x = \alpha$.

$h'(x) > 0$ ، $f'(2x-\alpha) > 0$ ، $2x - \alpha > \alpha$ ومنه: $x > \alpha$

$h'(x) < 0$ ، $f'(2x-\alpha) < 0$ ، $0 < 2x - \alpha < \alpha$ ومنه: $\frac{\alpha}{2} < x < \alpha$

h متزايدة تماما لما $x \geq \alpha$ و متناقصة تماما لما $\frac{\alpha}{2} < x \leq \alpha$

ب) من أجل $x \neq \frac{\alpha}{2}$: $\alpha - x \neq \frac{\alpha}{2}$ و $h(\alpha - x) = h(x)$

$x \neq \frac{\alpha}{2}$ ، $-x \neq -\frac{\alpha}{2}$ ومنه: $\alpha - x \neq \frac{\alpha}{2}$.

$h(\alpha-x) = f(|2(\alpha-x)-\alpha|) = f(|-2x+\alpha|) = f(|2x-\alpha|) = h(x)$

x	$-\infty$		0		$\alpha/2$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$x = \frac{\alpha}{2}$ محور تناظر يعني $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$: $x_1, x_2 \in D_h$

إذا كان $x_1 = \alpha$ ، $\frac{\alpha + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ومنه: $x_2 = 0$.

تمرين 3:

1) $g(x) = (x+1)f(x)$ ومنه: $g(0) = f(0) = 1$

حل (E) هو: $(x \mapsto Ce^x)$ (الحل العام) $C \in \mathbb{R}$

بما أن $g(0) = 1$ إذن: $Ce^0 = 1$ ؛ أي $C = 1$

ومنه: $g(x) = e^x$

2) لدينا: $f(x) = \frac{g(x)}{x+1} = \frac{e^x}{x+1}$.

$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

f حل لـ (F) يعني: $f' - f = \frac{-e^x}{(x+1)^2}$.

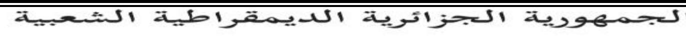
(محققة) $f'(x) - f(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} - \frac{e^x}{(x+1)} = \frac{-e^x}{(x+1)^2}$

3) $\begin{cases} h' - h = \frac{e^x}{(x+1)^2} \\ f' - f = -\frac{e^x}{(x+1)^2} \end{cases}$ بالجمع نجد: $(h+f)' - (h+f) = 0$ ومنه: $h+f$ حل لـ (E).

$h(x) + f(x) = Ce^x$ إذن: $h(x) = Ce^x - f(x)$

$h(0) = 0$ ، $C = 1$ ومنه: $h(x) = \frac{xe^x}{x+1}$

"عبد المطلب"





المستوى:الثالثة علوم تجريبية — ديسمبر 2022

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات — المدة : ساعتين.

التمرين 1

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2x+1)e^{2x} - 1$

1) أدرس تغيرات الدالة .

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x(1-e^{2x}) + 3$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) احسب $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x - 3]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

4) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، ثم اكتب معادلته.

6) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث :

$$\ln 2 < \alpha < 1 \quad \text{و} \quad -3.2 < \beta < -3$$

7) أنشئ (Δ), (T) و (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x) = x+m$

التمرين 2 (10 ن)

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 1 - 2\ln(x)$$

1) أدرس تغيرات الدالة .

2) حدد اشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ: $f(x) = x - 4 + \frac{3+2\ln(x)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ) احسب $\lim_{x \to 0^{>}} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

ب) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل(Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

3) أ) بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أنشئ (Δ) و (C_f).

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	(see below)	التمرين 1

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2x+1)e^{2x} - 1$

1) دراسة تغيرات الدالة g

- النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2xe^{2x} + e^{2x} - 1) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

- الدالة المشتقة

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة حيث :

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x) = 4(x+1)e^{2x}$

- إشارة $g'(x)$:

إشارة $g'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{2x} > 0$ و $4 > 0$

لدينا $g'(x) = 0$ يكافئ $x + 1 = 0$ ومنه $x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

و منه g دالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; -1]$

و متزايدة تماما على المجال $[-1 ; +\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$-(e^{-2}+1)$	↗	$+\infty$

2) حساب $g(0)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$.

$g(0)=0$

إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x(1-e^{2x}) + 3$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) حساب $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-x-3]$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x-3] = \lim_{x\to-\infty}(2xe^{2x}) = 0$$

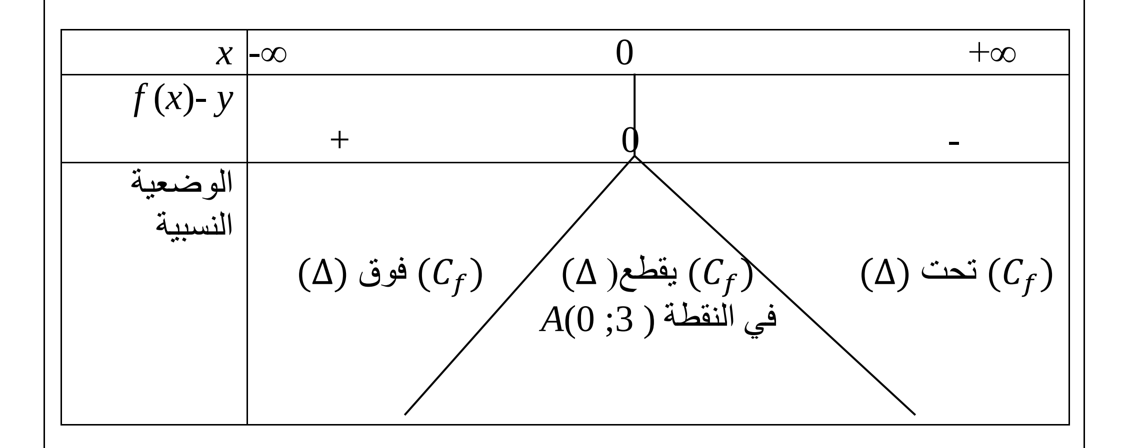
و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y= x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

3) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

إشارة $f(x)-y$:

$-xe^{2x} = 0$ يكافئ $-x = 0$ لأن $e^{2x} > 0$ و منه $x= 0$

و منه إشارة $f(x)-y$ من إشارة $-x$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;3)$	(C_f) تحت (Δ)

4) أ) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = -g(x)$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث :

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

و منه: $f'(x) = -[(2x+1)e^{2x} - 1]$

إذن: $f'(x) = -g(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

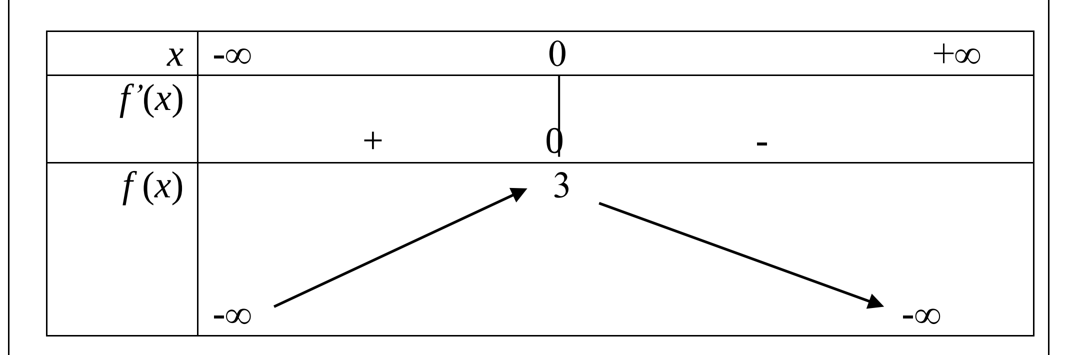
- إشارة $f'(x)$: عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-g(x)$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	

و منه f دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; 0]$

و متناقصة تماما على المجال $[0 ; +\infty[$

- جدول التغيرات



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

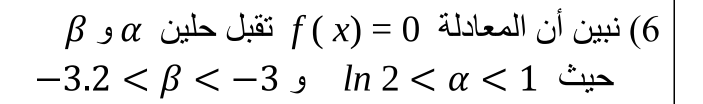
5) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، ثم كتابة معادلته.

معناه : $f'(x) = 1$ و منه $x = -\frac{1}{2}$

اذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يكون موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{-1}{2}$

- معادلة المماس (T)

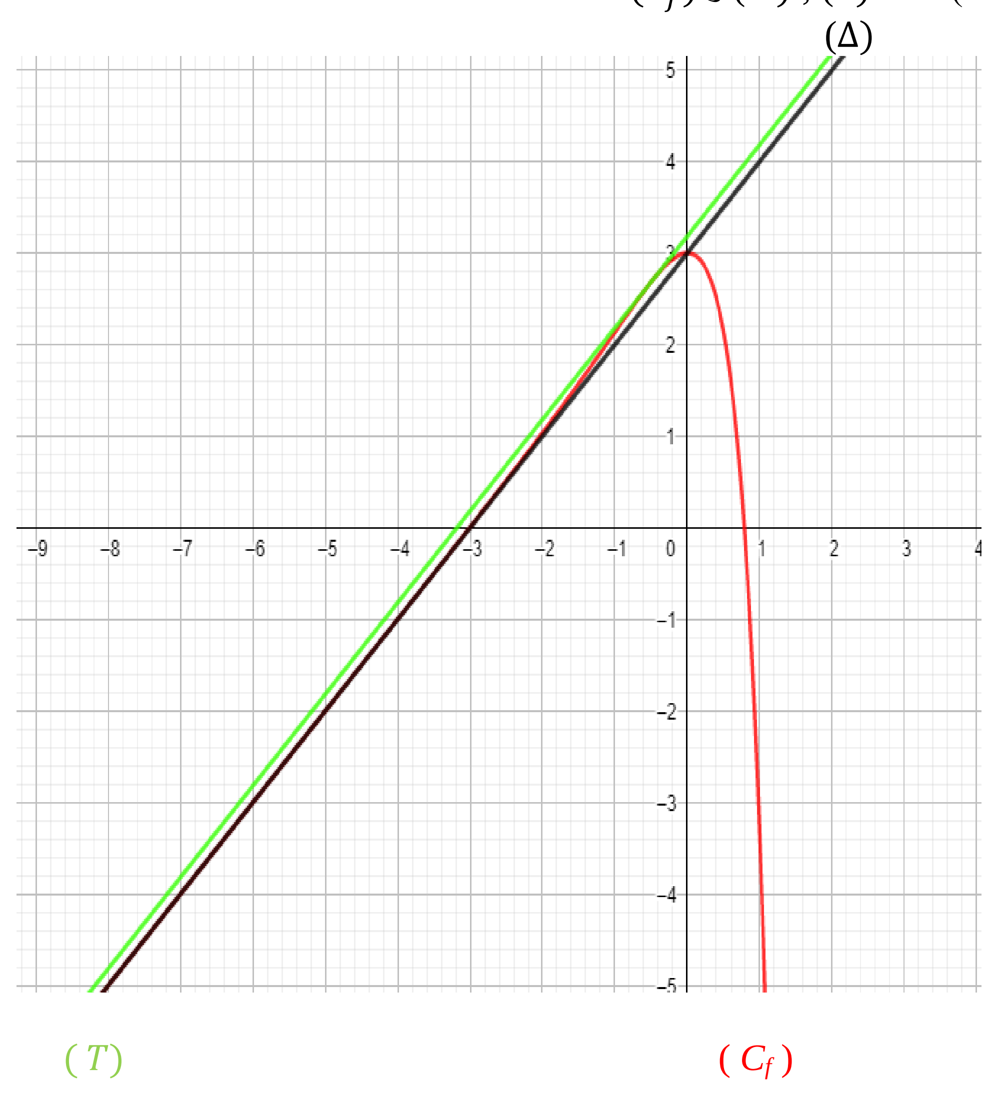
$$(T): y = x + 3 + \frac{1}{2e}$$



6) نبين أن المعادلة $f\,(\,x) = 0$ تقبل حلين α و β
حيث $ln\,2 < \alpha < 1$ و $-3.2 < \beta < -3$

استعمال مبرهنة القيم الموسطة

7) انشاء (Δ) ; $(\,T\,)$ و (C_f).



8) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة :
$f(x) = x{+}m$
حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة
$y = \;\; = x{+}m$.

- لما $m \in]-\infty ; 3[$ فإن المعادلة تقبل حل موجب
- لما $m{=}3$ فإن المعادلة تقبل حل معدوم.
- لما $m \in]3; 3 + \frac{1}{2e}[$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين
- لما $m{=}\ 3 + \frac{1}{2e}$ فإن المعادلة تقبل حل سالب

- لما $m \in]3+\frac{1}{2e};+\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

التمرين 2

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$g(x) = x^2 - 1 - 2\,ln(x)$

1) تغيرات الدالة g

- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty;\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$$

- الدالة المشتقة :

g دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و g' دالتها المشتقة حيث :

$g'(x) = \frac{2x^2-2}{x}$

- إشارة $g'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	|	-	0	+	

و منه g دالة متناقصة تماما على المجال $]0;1]$

و متزايدة تماما على المجال$[1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	|	-	0	+	
$g(x)$	| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) اشارة $g(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	|	+	0	+	

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بــ:

$f(x) = x - 4 + \frac{3+2\ ln(x)}{x}$

1) أ) حساب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم تفسير النتائج هندسيا.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$$

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

ب) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) أ) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$

$(\Delta): y = x - 4$

ب) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

x	0		$e^{\frac{-3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$- y		-	0	+	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(e^{\frac{-3}{2}}; e^{\frac{-3}{2}} - 4)$	(C_f)فوق (Δ)	

3) أ) نبين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث :

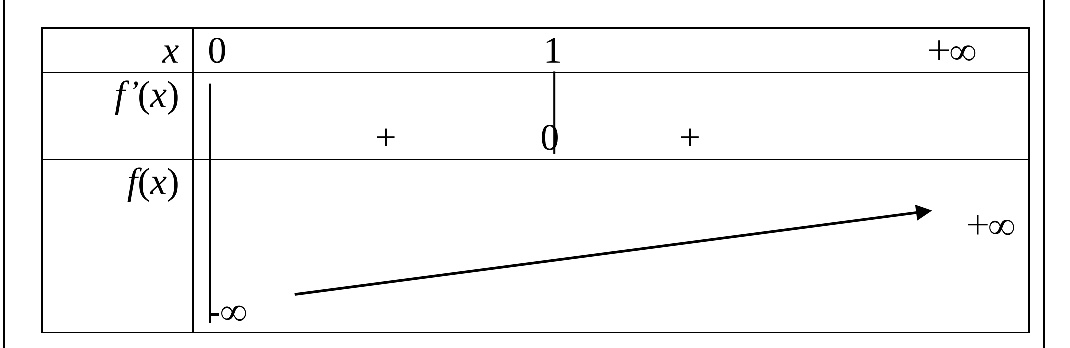
$f'(x) = 1 + \frac{-1-2\ln x}{x^2}$ إذن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول التغيرات

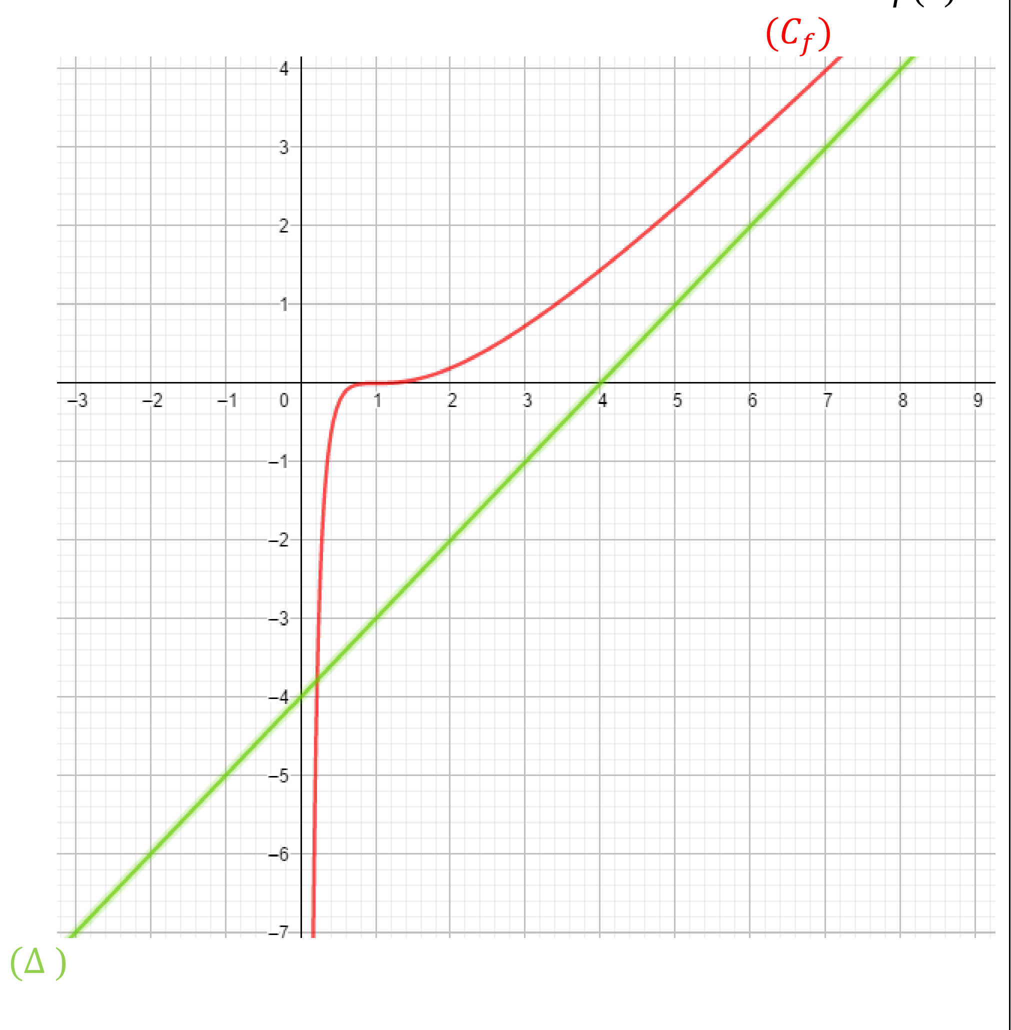


x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		↗		$+\infty$

4) انشاء (Δ) و (C_f).

$f(1)=0$

(C_f)



(Δ)

المستوى: الثالثة رياضيات **ديسمبر 2022**

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات **المدة : 2سا**

التمرين1

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل حالة مما يلي :

	الإجابة (أ)	الإجابة (ب)	الإجابة (ج)
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(-x+e)-1}{x}=$	$-e^{-1}$	e	1
إذا كانت g(x)>0 في المجال $]-1;+\infty[$ وكانت $f(x)=g(e^x-1)$ فإن $f(x)>0$ في المجال	$]-1;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;1[$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}(x^2+1-2\ln x)$	$+\infty$	$-\infty$	0

التمرين 2

I) لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ)احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) احسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2)أ) بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

4) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.

5)) انشئ كلا من (T) و (C_f).

6) حل بيانيا المتراجحة : $(x+1)\ln x\geq 2x-2$

7) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = f(x^2e^x)$.

أ) إعتمادا على تغيرات f ادرس اتجاه تغير h.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة h.

التمرين 3

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب*/ استنتج أنه : إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x \succ 1$ فإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيـلها البيـاني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

h دالـة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني (**<u>أنظر الملحق</u>**)

أ*/ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to 0} f(x)$.

ب*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج*/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ*/ بين أن المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيــث: $1.5 \prec \beta \prec 1.6$ و $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

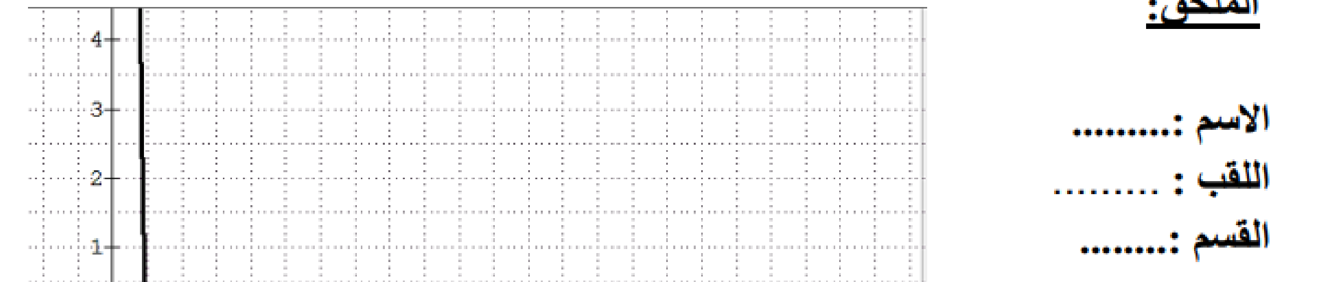
ب*/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h).

ج*/ بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها **1** يطلب كتابة معادلته .

4) أ*/ أرسم (T) و (C_f) . **(الملحـــق يعـــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب*/ m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)...f(x)=(m^2-2m+2)e^m+h(m)$$



الملحق:

الاسم :.........

اللقب : ....

القسم :........

(C_h)

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل	العلامة
التمرين1 **3 ن**	1) $-e^{-1}$ 2) $]-\infty;+\infty[$ 3) 0	
التمرين2 **8 ن**	1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. $g'(x)=\dfrac{2x-2}{x}$ لما $0<x<1$ فإن $g'(x)<0$ لما $x>1$ فإن $g'(x)>0$ $g'(1)=0$ جدول التغيرات إشارة $g(x)$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $g(x)>0$ **II(1)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته x=0 2)ا) من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ فإن: $f'(x)=g(x)$. f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ جدول التغيرات 3) (C_f) يقبل نقطة انعطاف: I(1,0) 4) معادلة المماس (T): y=x-1 5) الرسم 6) حلول المتراجحة : $S=[1;+\infty[$ 7) الدالة متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$ ومتناقصة تماما على $[-2;0[$ جدول التغيرات	

التمرين3

دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

(1

الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

استنتاج أنه : إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x \succ 1$ فإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فـإن $x \prec \frac{1}{x}$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x) \prec g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x \succ 1$ فـإن $x \succ \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x) \succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

(2

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشـــارة $f'(x)$.

f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1]$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e = -2.71$	↗	$+\infty$

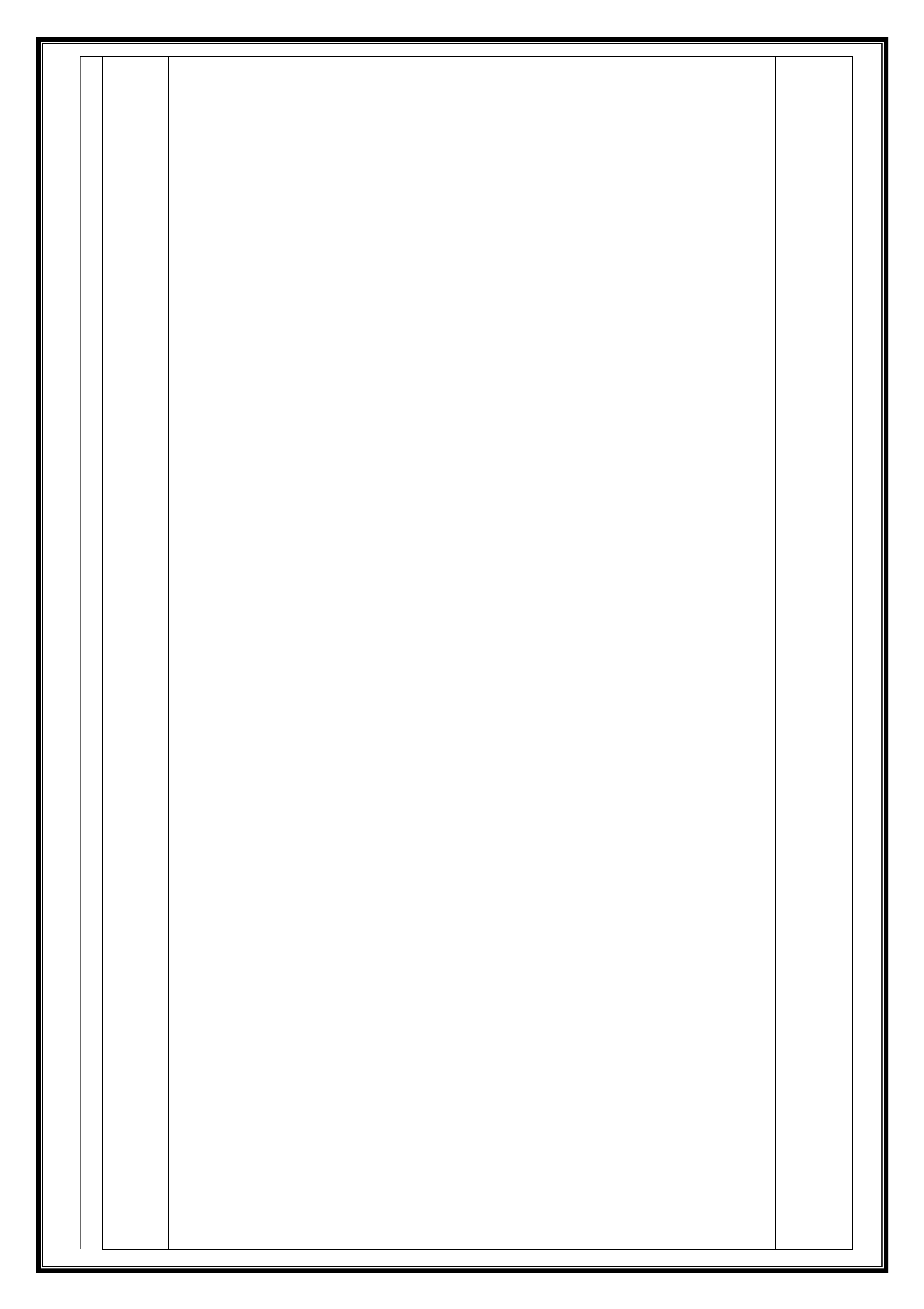
المعادلة: $(x^2-2x+2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5 \prec \beta \prec 1.6$ و $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$

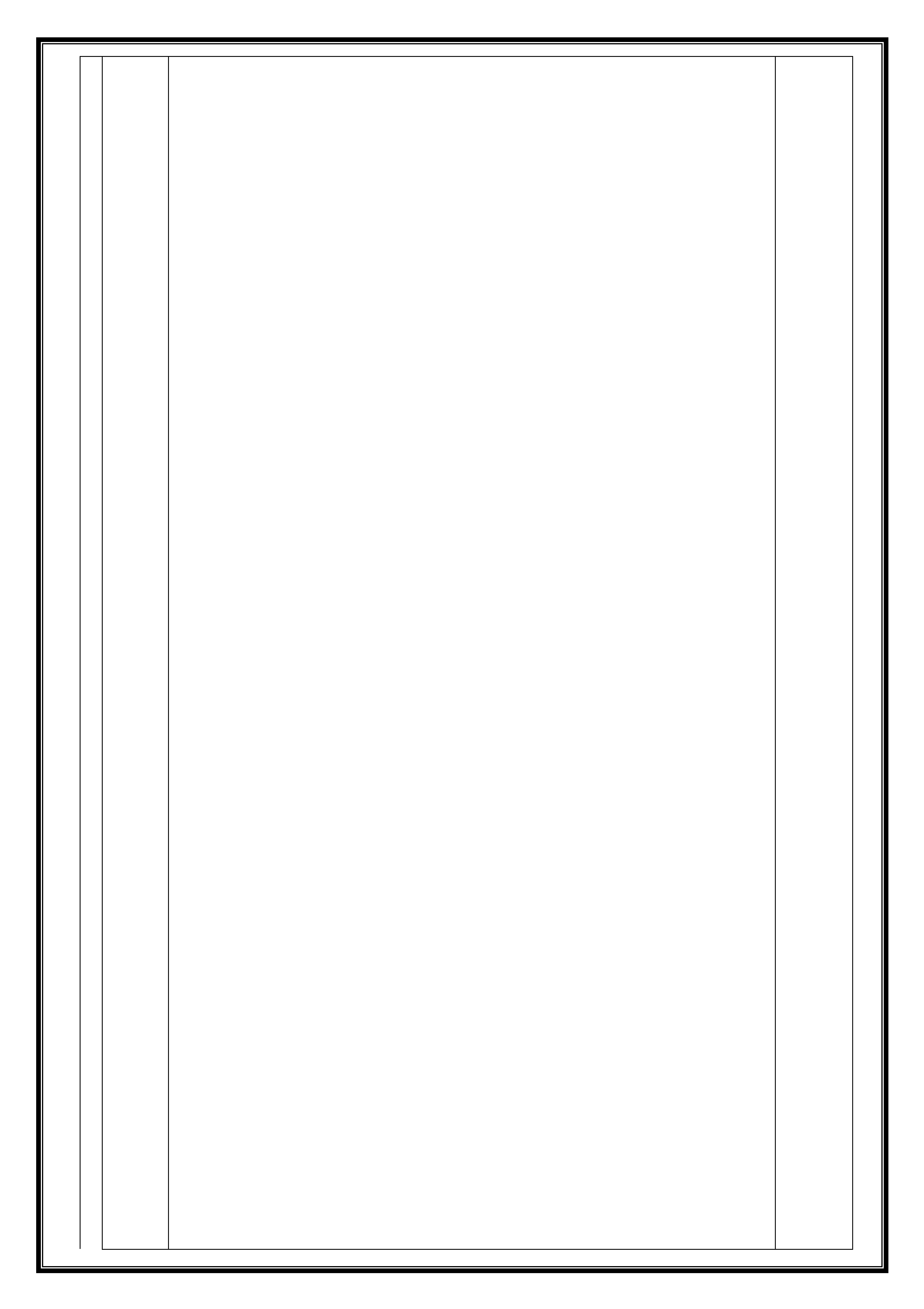
دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h)

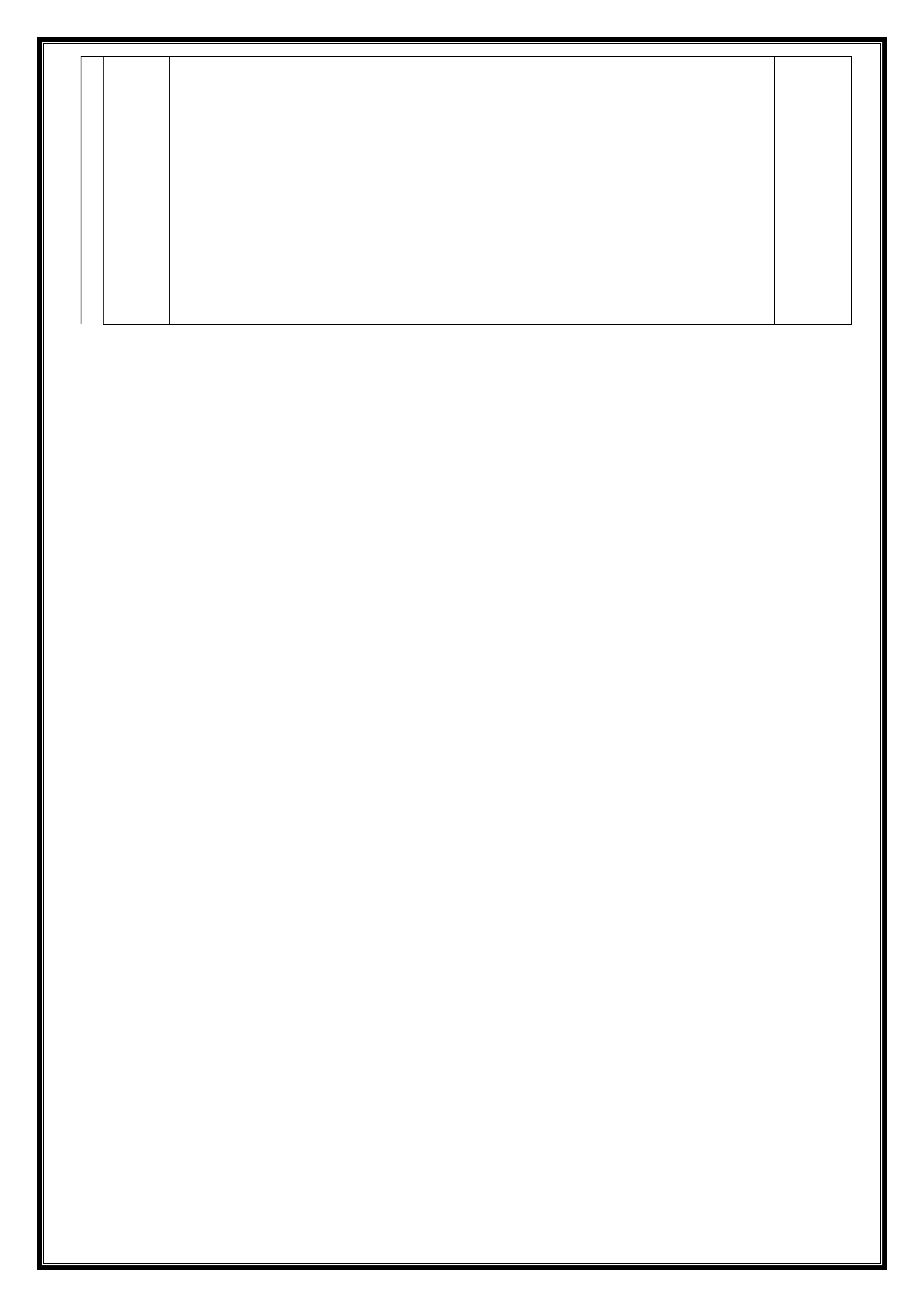
(C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

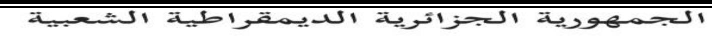
$(T): y = -e$

المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$









وزارة التربية الوطنية



مؤسسة التربية و التعليم الخاصة

أوبينيا تر

ابتدائي متوسط ثانوي اقامة

Email: saitameur3@gmail.com 023 71 54 67 :فاكس 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 :رقم الهاتف

المستوى:الثالثة علوم تجريبية **ديسمبر 2022**

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات المدة : 2سا

التمرين 1 : (10 ن)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2x+1)e^{2x} - 1$

1) أدرس تغيرات الدالة .

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x(1-e^{2x}) + 3$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x - 3]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

4) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، ثم اكتب معادلته.

6) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث :

$$\ln 2 < \alpha < 1 \quad \text{و} \quad -3.2 < \beta < -3$$

7) أنشئ (Δ), (T) و (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x) = x+m$

التمرين 2 (10 ن)

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 1 - 2\,ln(x)$$

1) أدرس تغيرات الدالة .

2) حدد اشارة $g\ (x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـــ: $f(x) = x - 4 + \frac{3+2\,ln(x)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل(Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

3) أ) بين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g\ (x)}{x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أنشئ (Δ) و (C_f).

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2x+1)e^{2x} - 1$ 1) دراسة تغيرات الدالة g • النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2xe^{2x} + e^{2x} - 1) = -1$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ • الدالة المشتقة g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة حيث : من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x) = 4(x+1)e^{2x}$ • إشارة $g'(x)$: إشارة $g'(x)$ من إشارة $x + 1$ لأن $e^{2x} > 0$ و $4 > 0$ لدينا $g'(x) = 0$ يكافئ $x + 1 = 0$ ومنه $x = -1$	**التمرين 1**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

و منه g دالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; -1]$

و متزايدة تماما على المجال $[-1 ; +\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1 ↘	$-(e^{-2}+1)$	↗ $+\infty$

2) حساب $g(0)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$.

$g(0)=0$

إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x(1 - e^{2x}) + 3$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2) حساب $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x - 3]$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - x - 3] = \lim_{x\to-\infty} (-xe^{2x}) = 0$$

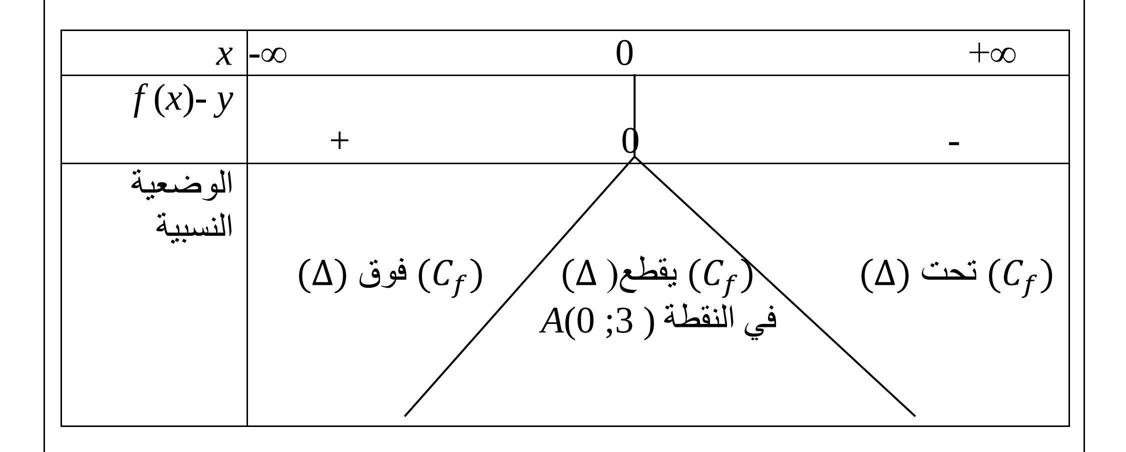
و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y= x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

3) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

إشارة $f(x) - y$:

$-xe^{2x} = 0$ يكافئ $-x = 0$ لأن $e^{2x} > 0$ و منه $x = 0$

و منه إشارة $f(x) - y$ من إشارة $-x$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;3)$	(C_f) تحت (Δ)

4) أ) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = -g(x)$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث :

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

و منه: $f'(x) = -[(2x+1)e^{2x} - 1]$

إذن: $f'(x) = -g(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

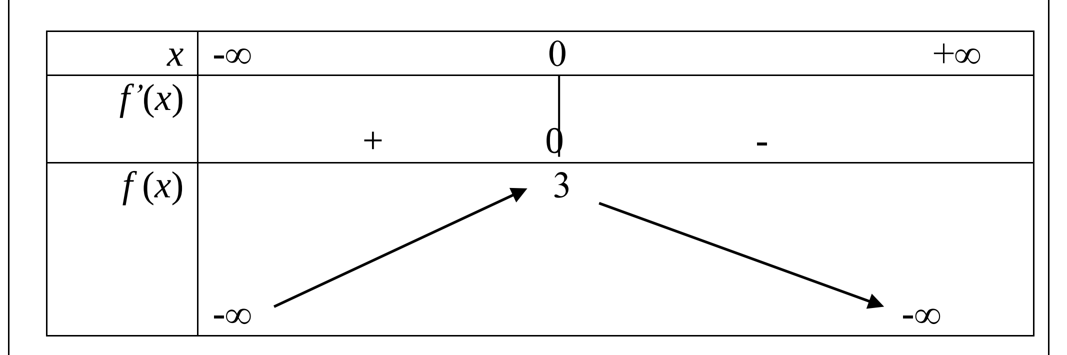
- إشارة $f'(x)$: عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

و منه f دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; 0]$

و متناقصة تماما على المجال $[0 ;+\infty[$

- جدول التغيرات



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

5) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، ثم كتابة معادلته.

معناه : $f'(x) = 1$ و منه $x = -\frac{1}{2}$

اذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يكون موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{-1}{2}$

- معادلة المماس (T)

$$(T): y = x + 3 + \frac{1}{2e}$$

6) نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β
حيث $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-3.2 < \beta < -3$

•

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $]0 ; +\infty[$ خاصة على المجال $[\ln 2 ; 1]$

لدينا $f(\ln 2)= 0.92 ; f(1)= -3.39$ و منه $f(\ln 2)\times f(1) \quad <0$

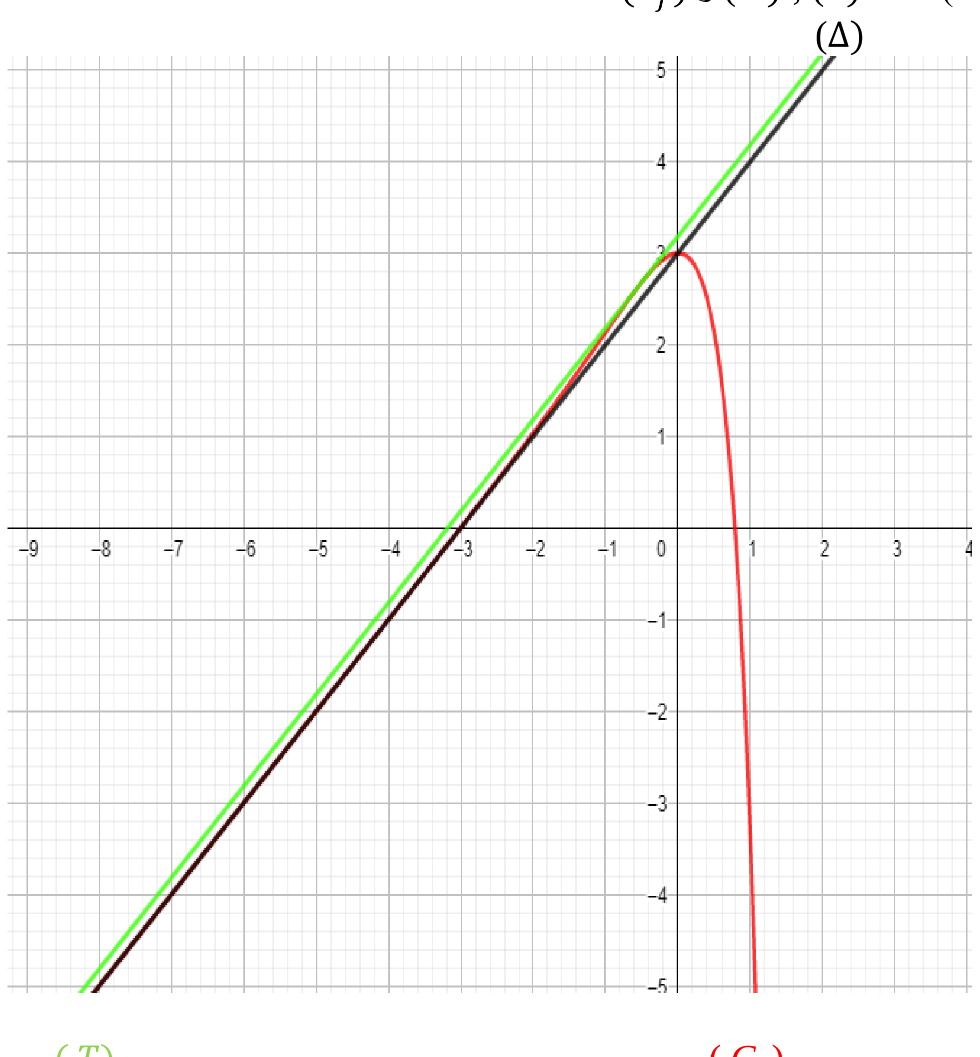
إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α حيث :
$\ln 2 < \alpha < 1$

•

f دالة مستمرة و متزايدة تماما على $]-\infty ; 0]$ و خاصة على المجال $[-3.2 ; -3]$

لدينا $f(-3.2)= -0.19 ; f(-3)= 0.007$ و منه

7) انشاء (Δ) ; (T) و (C_f).



8) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة :
$f(x) = x+m$
حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة
. $y = \; = x+m$

- لما $m \in]-\infty; 3[$ فإن المعادلة تقبل حل موجب
- لما $m=3$ فإن المعادلة تقبل حل معدوم.
- لما $m \in]3; 3+\frac{1}{2e}[$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين
- لما $m= 3+\frac{1}{2e}$ فإن المعادلة تقبل حل سالب
- لما $m \in]3+\frac{1}{2e}; +\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

التمرين 2

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:
$g(x) = x^2 - 1 - 2\ln(x)$

1) تغيرات الدالة g

- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty;\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$$

- الدالة المشتقة :

g دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و g' دالتها المشتقة حيث :

$g'(x) = \frac{2x^2-2}{x}$

- إشارة $g'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	

و منه g دالة متناقصة تماما على المجال $]0; 1]$
و متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$
جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) اشارة $g\ (x)$.

x	0		1		$+\infty$
$g\ \ (x)$	||	+	0	+	

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ:

$$f(x) = x - 4 + \frac{3+2\ ln(x)}{x}$$

1) أ) حساب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)$ ثم تفسير النتائج هندسيا.

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = -\infty$$

(C_f)يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) أ) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل(Δ) بجوار $+\infty$

$$(\Delta): y = x - 4$$

ب) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

x	0		$e^{\frac{-3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$- y	||	+-	0	+	
الوضعية النسبية	||	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع Δ) في النقطة $A(e^{\frac{-3}{2}}; e^{\frac{-3}{2}} - 4)$	(C_f)فوق (Δ)	

3) أ) نبين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g\ (x)}{x^2}$

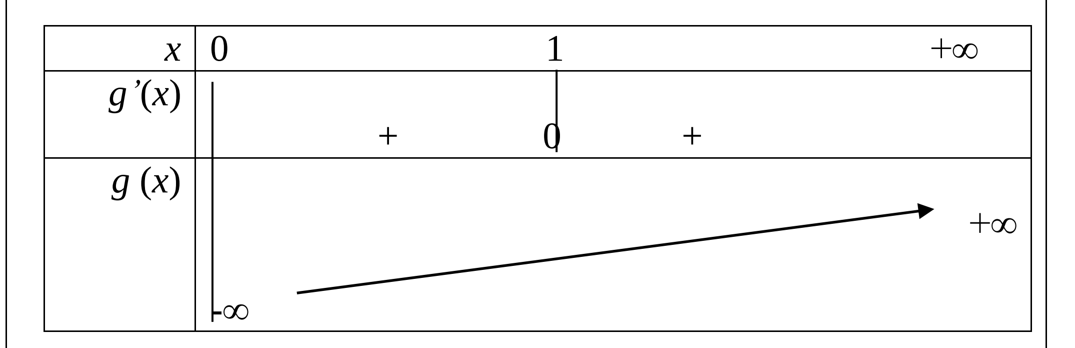
f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث :

$f'(x) = 1 + \frac{-1-2\ln x}{x^2}$ إذن $f'(x) = \frac{g\ (x)}{x^2}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها

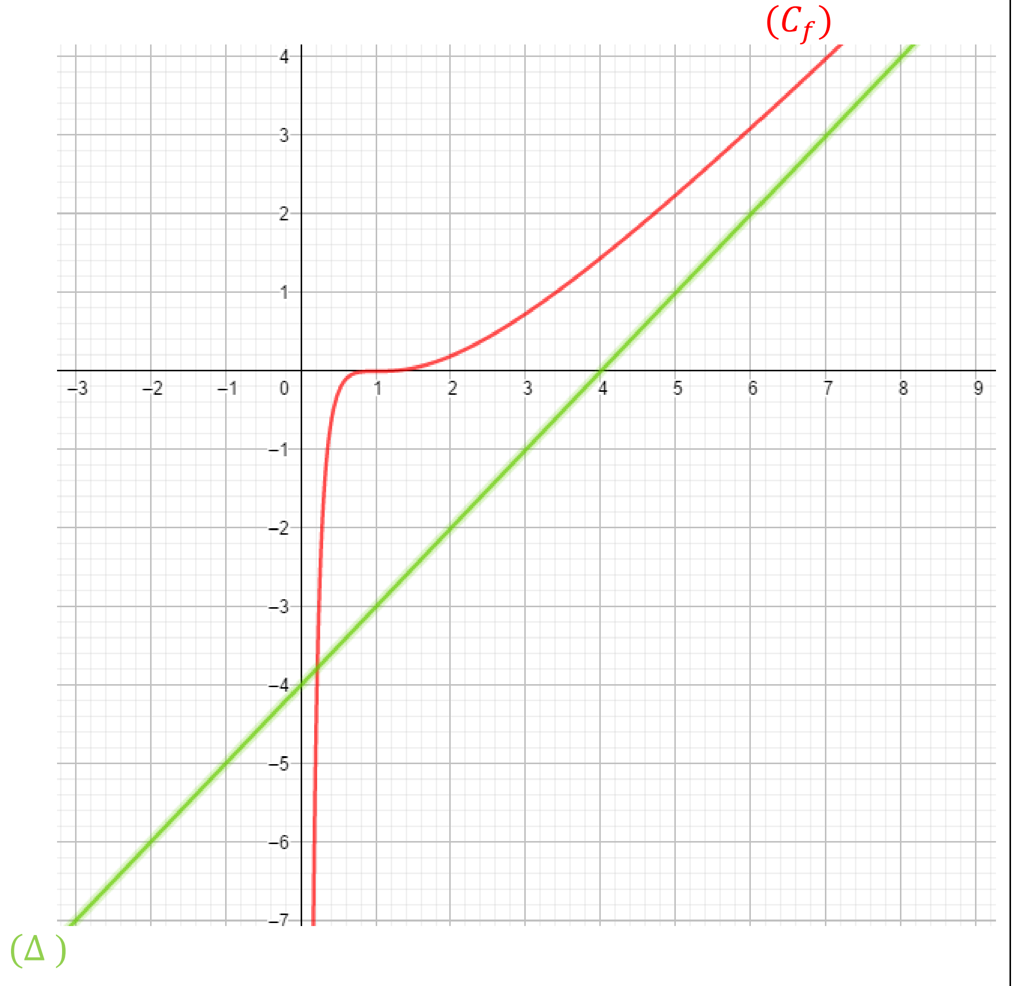
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$+$	

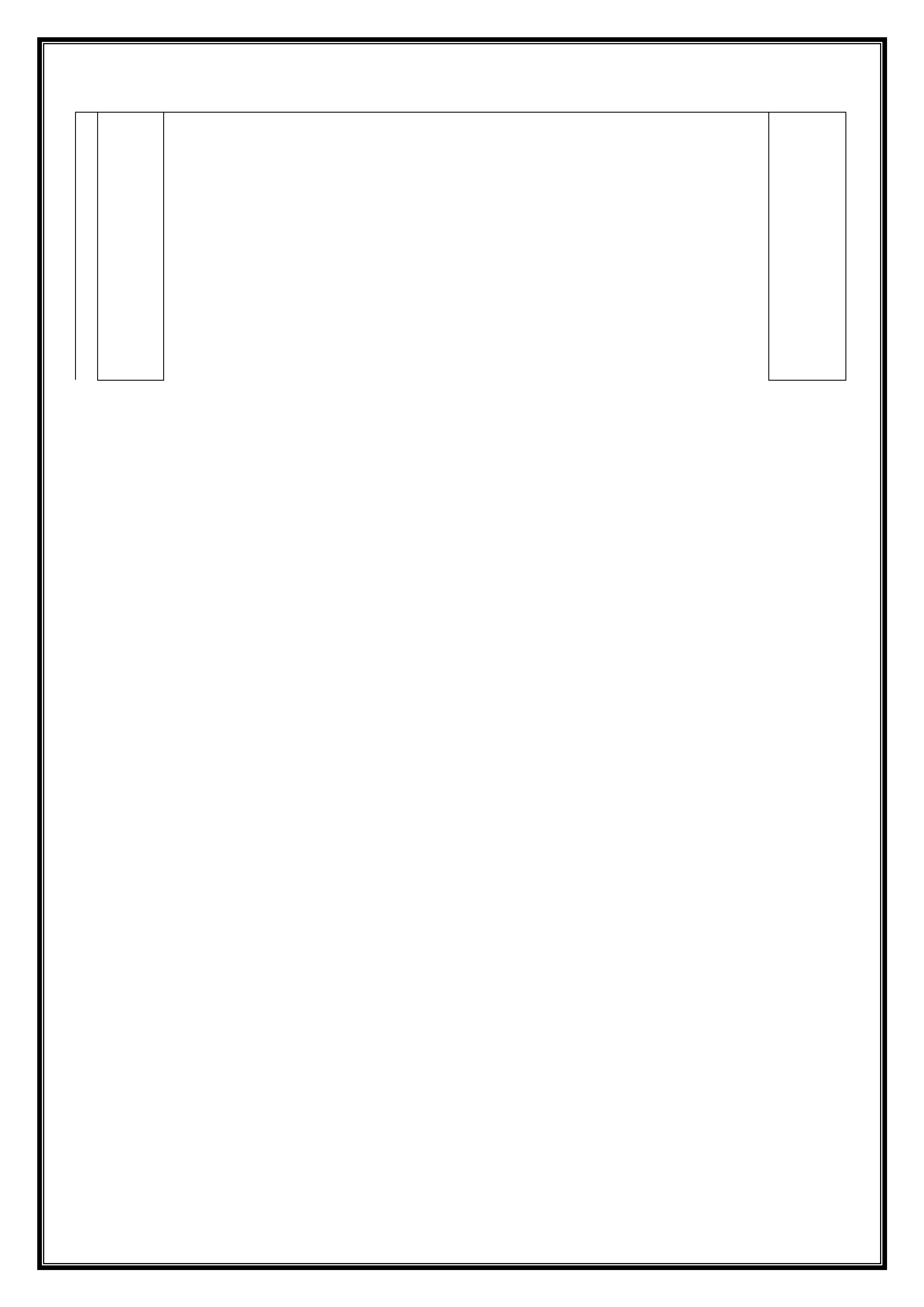
ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$
جدول التغيرات



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$		↗		$+\infty$

4) انشاء (Δ) و (C_f).





اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة تقني رياضي و ثالثة علمي المدّة: $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{-x+1}} + 1$ سا

التّمرين الأوّل:

فيمايلي عيّن الإقتراح الوحيد الصحيح مع التعليل

1) الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ هي دالة أ) فردية ب) زوجية ج) لا فردية ولا زوجية

2) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 - e^{\left(\frac{1-x}{x}\right)}$، منحناها البياني يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته:

أ) $y = x + 1$ ب) $y = x + 1 + e^{-1}$ ج) $y = x + 1 - e^{-1}$

3) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $-y' + (\ln 3)y = \ln 9$ حيث: $y(0) = 11$ هو:

أ) $y = 3^{x+2} - 2$ ب) $y = 3^{x+2} + 2$ ج) $y = 9e^{x} + 2$

4) f الدّالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 - 1)}{\ln x}$، نهاية f لما $x \to +\infty$ هي:

أ) $+\infty$ ب) 0 ج) 3

5) f الدّالة المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{-1 + x\ln(x-2)}{x}$ دالتها المشتقة هي:

أ) $f'(x) = \dfrac{x\ln(x-2) + x + 1}{x^3 - 2x^2}$ ب) $f'(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2(x-2)}$ ج) $f'(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2}$

التّمرين الثاني:

I. نعتبر الدّالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$h(x) = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$ والجدول المقابل يمثل جدول تغيراتها.

x	0	α	e	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	0	−
h	$-\infty$ ↗	0 ↗	$1 + \frac{2}{e}$	↘ 1

1) تحقق أن: $0,7 < \alpha < 0,8$.

2) شكل جدول إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدّالتين g و f المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ و $f(x) = g(x) + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

وليكن (C_g) و (C_f) تمثيليهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}; \vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$. ثم فسر النتيجتين هندسيا .

2) أدرس إتجاه تغير الدّالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أثبت أن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ ، ثم أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.ثم فسر النتيجتين هندسيا .

4) أثبت أنه من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$: $f'(x) = g'(x) \times h(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدّالة f .

5) أثبت أن : $f(\alpha) = \frac{3}{4}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدّالة f .

6) أثبت أن لـ (C_g) و (C_f) مماسا مشتركا (T) يطلب تعيين معادلة له .

7) أحسب $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - g(x)\right]$.ثم فسر النتيجة هندسيا .

8) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

9) أنشئ كل من المماس (T) و المنحنيين (C_g) و (C_f) في نفس المعلم .

III. نعتبر الدّالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $k(x) = f(|x|)$.

1) أثبت أن الدّالة k زوجية .

2) بيّن كيف يتم رسم (C_k) إنطلاقا من (C_f) .. ثم انشئه في معلم جديد.





التصحيح النموذجي لاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

حل التمرين الأول:

1) الدالة f هي (أ) فردية لأن:

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

مجال متناظر بالنسبة للصفر وعليه

$x \in D_f$ يعني $(-x) \in D_f$

$$f(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$= \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$= \ln 1 - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$= -f(x)$$

2) $f(x) = x+1-e^{\left(\frac{1-x}{x}\right)}$ يقبل منحناها البياني

مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = x+1-e^{-1}$ (ج) لأن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} x+1-e^{\left(\frac{1-x}{x}\right)} - (x+1-e^{-1})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x+1-e^{\left(\frac{1-x}{x}\right)} - x - 1 + e^{-1} = -e^{-1}+e^{-1} = 0$$

3) الحل العام للمعادلة التفاضلية هي (ب) لأن

$y' = (\ln 3)y - \ln 9$ أي $-y' = (-\ln 3)y + \ln 9$

أي $y = Ce^{(\ln 3)x} - \frac{-\ln 9}{\ln 3}$ أي أن:

$y = Ce^{(\ln 3)x} + \frac{2\ln 3}{\ln 3}$ أي $y = Ce^{(\ln 3)x} + 2$

أي $y = Ce^{\ln 3^x} + 2$ أي $y = C3^x + 2$

ولدينا: $y(0) = 11$ أي:

$y(0) = C3^{0} + 2 = 11$

وعليه $C = 9$

$y = 9(3^x) + 2 = 3^2 \times 3^x + 2$

$$\boxed{y = 3^{x+2} + 2}$$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3-1)}{\ln x}$ هي الإجابة (ج) لأن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\right]}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3 + \ln\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{\ln x} \quad (\ln 1 = 0)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x}{\ln x} = \boxed{3}$$

5) مشتقة الدالة f هي الإجابة (ج) لأن:

$$f'(x) = \frac{\left[1(\ln(x-2)) + \frac{1}{x-2}x\right]x - 1\left(-1+x\ln(x-2)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{x\ln(x-2) + \frac{x^2}{x-2} + 1 - x\ln(x-2)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2+x-2}{x-2}}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x-2} \times \frac{1}{x^2}$$

$$= \boxed{\frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2}}$$

حل التمرين الثاني:

1) التحقق من أن $0,7 < \alpha < 0,8$

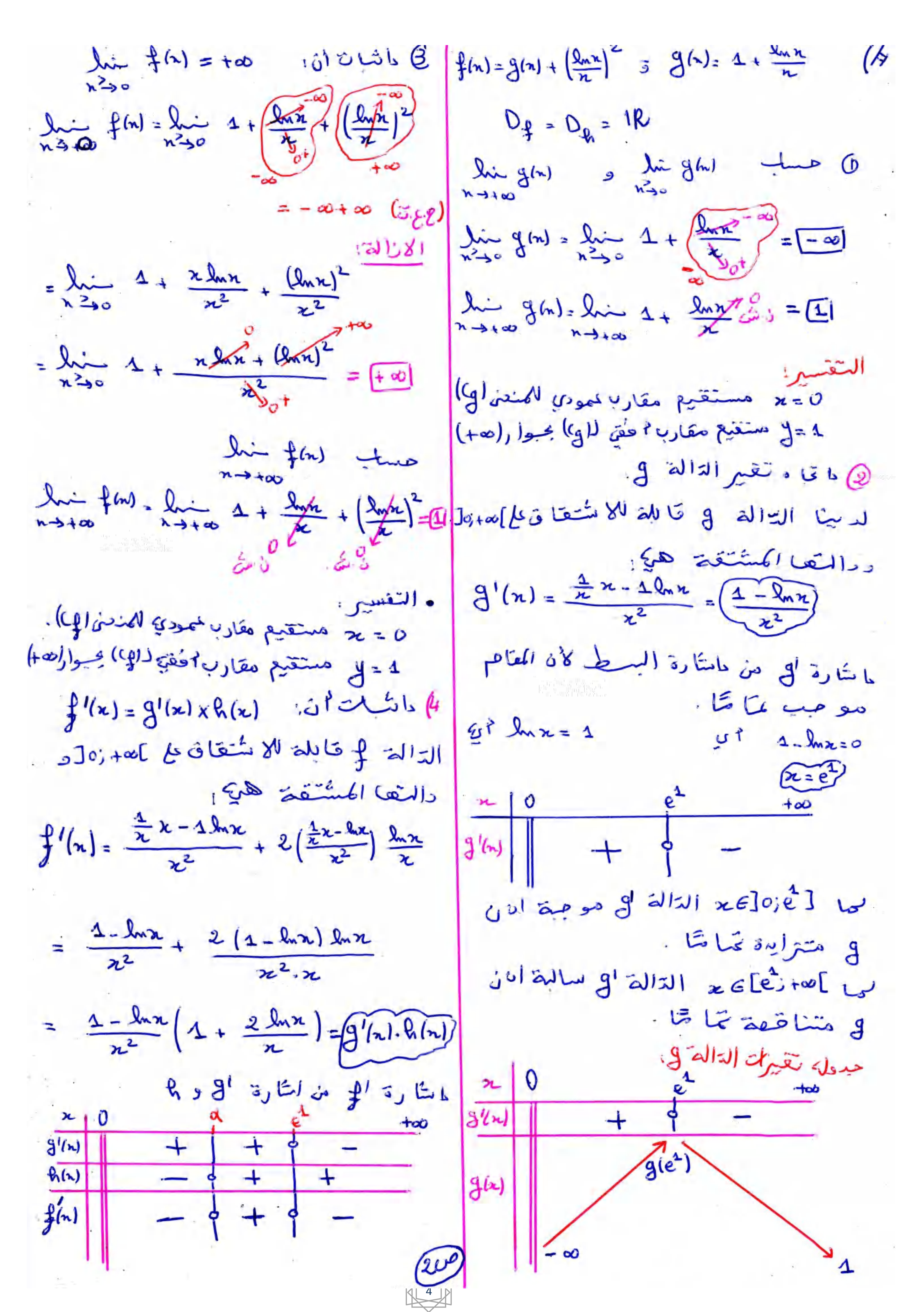
$h(0,7) \simeq -0,019$; $h(0,8) \simeq +0,44$

أي أن $\boxed{0,7 < \alpha < 0,8}$

2) جدول إشارة h

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ص 1



A) $g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ و $f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

$D_f = D_h = \mathbb{R}$

① حساب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{\ln x}{x} = \boxed{-\infty}$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = \boxed{1}$ (ن.ش)

التفسير:

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_g)

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_g) بجوار $(+\infty)$

② دراسة تغير الدالة g.

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

إشارة g' من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما.

$1 - \ln x = 0$ أي $\ln x = 1$ أي

$x = e^1$

x	0		e^1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

لما $x \in]0;e^1]$ الدالة g' موجبة اذن g متزايدة تماما.

لما $x \in [e^1;+\infty[$ الدالة g' سالبة اذن g متناقصة تماما.

جدول تغيرات الدالة g:

x	0		e^1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$g(e^1)$	↘	1

③ إثبات أن: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

$= -\infty + \infty$ (ح.ع.ت)

الإزالة:

$= \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{x\ln x}{x^2} + \frac{(\ln x)^2}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{x\ln x + (\ln x)^2}{x^2} = \boxed{+\infty}$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = \boxed{1}$ (ن.ش)

• التفسير:

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

4) إثبات أن: $f'(x) = g'(x) \times h(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1\ln x}{x^2} + 2\left(\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}\right)\frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{2(1-\ln x)\ln x}{x^2 \cdot x}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}\left(1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = g'(x)\cdot h(x)$$

إشارة f' من إشارة g' و h

x	0		α		e^1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ص200

وعليه اتجاه تغير الدالة f كالآتي:

لما $x\in]0;\alpha]$ و $x\in[e;+\infty[$ الدالة f' سالبة

اذن f متناقصة تماما.

ولما $x\in[\alpha;e]$ الدالة f' موجبة اذن f متزايدة تماما

5) لنثبت أن $f(\alpha)=\frac{3}{4}$

$$f(\alpha)=g(\alpha)+\left(\frac{\ln\alpha}{\alpha}\right)^2=1+\frac{\ln\alpha}{\alpha}+\left(\frac{\ln\alpha}{\alpha}\right)^2$$

ولدينا: $h(\alpha)=0$ أي $1+\frac{2\ln\alpha}{\alpha}=0$

أي $\frac{\ln\alpha}{\alpha}=-\frac{1}{2}$ وعليه

$$f(\alpha)=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{4-2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		α		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$f(\alpha)=\frac{3}{4}$	↗	$f(e)$	↘	1

6) تبيان أن (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا

$$f'(x)=g'(x)$$

لدينا: $f'(x)=g'(x)\times h(x)$ أي

$$g'(x)\times h(x)=g'(x)$$

وعليه $h(x)=1$ أي $1+\frac{2\ln x}{x}=1$

أي $\frac{2\ln x}{x}=0$ أي $2\ln x=0$

$\ln x=0$ أي $x=1$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ | $f'(1)=1$, $f(1)=1$

$y=x-1+1$

$(T): y=x$

أو بالتعويض في g:

$(T)\ y=g'(1)(x-1)+g(1)$; $\begin{cases}g'(1)=1\\ g(1)=1\end{cases}$

$y=x-1+1$

$(T): y=x$

7) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2=0$

(C_g) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

8) الوضع النسبي

ندرس اشارة الفرق $f(x)-g(x)$

$f(x)-g(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	||	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي	||	(C_f) فوق (C_g)	(C_f) يقطع (C_g)	(C_f) فوق (C_g)	

9) الانشاء

(T) (C_f) (C_g)

10) $K(x)=f(|x|)$

أ) الاثبات أن K زوجية

$D_K=\mathbb{R}^*$ مجال متناظر بالنسبة للصفر.

نعلم أن $|-x|=|x|$

$$K(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=K(x)$$

K دالة زوجية.

(C_K)

ص 3

وزارة التربية الوطنية | السنة الدراسية : 2021/2020
مديرية التربية لولاية بجاية | المستوى : الثالثة رياضيات
ثانوية الشهداء السبعة بوعيفل - سيدي عيش | المدة : ساعتان

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (5 نقاط):

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q و حدها الأول u_0 حيث :

$$\begin{cases} \ln(u_2) - \ln(u_4) = 4 \\ \ln(u_1) + \ln(u_5) = -12 \end{cases}$$

1) عين الأساس q و الحد الأول u_0 ثم أكتب عبارة u_n بدلالة n.

2) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + eu_1 + e^2u_2 + ... + e^n u_n$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها.

ب- احسب المجموع T_n و حيث: $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

ج- عين قيمة n حتى يكون $T_n^{\ 2} = 2^{30}$.

التمرين الثاني (6 نقاط):

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين (x, y) حيث: $4x - 9y = 5$.

1) تحقق أن الثنائية $(-10, -5)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

2) A عدد طبيعي حيث $A = \overline{43}$ في نظام العد ذي الأساس x و $A = \overline{98}$ في نظام العد ذي الأساس y حيث: $x \le 35$ و $y \le 15$

- عين القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب A في النظام العشري

3) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 9.

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية لـ $2971 + 1442^{6n+2} - 2020^{2021}$ على 9.

ج- عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث: $2020^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

<u>التمرين الثالث(9 نقاط):</u> نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) & ; \ x\neq 0\\ 1 & ; \ x=0\end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.

ب- أحسب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

جـ- أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) نضع: $h(x)=f(x)-x$. بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,65\prec\alpha\prec 0,7$.

4) أحسب $f(-x)+f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5) أ- أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T). ماذا تستنتج؟

6) أنشئ (T) و (C_f).

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $f(x)=-\frac{1}{2}x+e^m-1$

8) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0=0$ من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|U_n-\alpha|\leq\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج؟

أستاذتكم تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح – بن صافية-

الإجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول

التمرين الأول:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q و حدها الأول u_0 حيث :

$$(1)............\begin{cases}\ln(u_2)-\ln(u_4)=4\\ \ln(u_1)+\ln(u_5)=-12\end{cases}$$

1) تعيين الأساس q و الحد الأول u_0 :

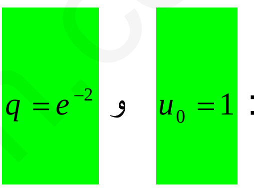
لدينا: (1) تكافيء: $\begin{cases}\dfrac{u_2}{u_4}=e^2\\ u_1\times u_5=e^{-12}\end{cases}$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q

فإن: $u_2=u_0\times q^2$ ، $u_4=u_0\times q^4$ ، $u_1=u_0\times q^1$ و $u_5=u_0\times q^5$ بالتعويض نجد:

$$\begin{cases}\dfrac{u_0\times q^2}{u_0\times q^4}=e^4\\ u_0\times q^1\times u_0\times q^5=e^{-12}\end{cases}$$

منه: $u_0=1$ و $q=e^{-2}$



عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n=u_0\times q^n$ منه: $u_n=e^{-2n}$.

2) حساب المجموع S_n :

$$S_n=1+eu_1+e^2u_2+.............+e^nu_n$$

نضع: $y_n=e^nu_n=e^{-n}$ المتتالية (y_n) متتالية هندسية أساسها e^{-1} و حدها الأول $y_0=1$

منه: $S_n=y_0+y_1+y_2+.............+y_n$

$$=\left(\frac{1-e^{-n+1}}{1-e^{-1}}\right)$$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية حسابية: لدينا:

$$v_{n+1}-v_n=\ln u_{n+1}+\ln u_{n+2}-\ln u_n-\ln u_{n+1}$$

$$=\ln\left(\frac{u_{n+2}}{u_n}\right)=\ln\left(\frac{e^{-2(n+2)}}{e^{-2n}}\right)$$

$$=\ln\left(e^{-2n-4+2n}\right)=-4$$

منه (v_n) متتالية حسابية أساسها (4-)

ب- حساب المجموع T_n :

$$T_n=v_0+v_1+v_2+...............+v_n$$

$$=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$$

$$=\frac{n+1}{2}(-2-4n-2)$$

$$=(n+1)(-2-2n)$$

ج- تعيين قيمة n حتى يكون $T_n^2=2^{30}$:

لدينا $(T_n)^2=((n+1)(-2-2n))^2$ منه:

$$((n+1)(-2-2n))^2=2^{30}$$

$$\left(-2(n+1)^2\right)^2=2^{30}$$

$$2^2(n+1)^4=2^{30}$$

$$(n+1)^4=2^{28}$$

$$(n+1)=2^7$$

$$n=127$$

التمرين الثاني:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين (x,y) حيث: $4x-9y=5$.

1) التحقق أن الثنائية $(-10,-5)$ حل للمعادلة (E) و حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E):

لدينا: $4(-10)-9(-5)=5$ منه: الثنائية $(-10,-5)$ حل للمعادلة (E).

الحل: $\begin{cases}4x-9y=5\\ 4(10)-9(5)=-5\end{cases}$ بالجمع نجد:

$$4(x-10)=9(y+5)$$

حسب غوص 4 يقسم $(y+5)$ أي:

$y=4k-5 \quad ....k\in\mathbb{Z}$.

بالتعويض نجد: $x=9k-10 \quad ....k\in\mathbb{Z}$.

2) A عدد طبيعي حيث $A=\overline{43}$ في نظام العد ذي الأساس x و $A=\overline{98}$ في نظام العد ذي الأساس y
حيث: $x\le 35$ و $y\le 15$
القيم الممكنة لـ x و y و كتابة A في النظام العشري

k	2	3	4	5
x	8	17	26	35
y	3	7	11	15
A	35	71	107	143

3) أ- دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 9.

k	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	4	7

ب- باقي القسمة الإقليدية لـ $2020^{2021}-1442^{6n+2}+2971$ على 9:
لدينا: $2020\equiv 4[9]$ و $2021=3\times 673+2$ منه: $2020^{2021}\equiv 4^{3\times 673+2}[9]$ أي: $2020^{2021}\equiv 7[9]$

و لدينا: $1442\equiv 2[9]$ و $1442^{6n+2}=\left(1442^2\right)^{3n+1}$
منه: $1442^{6n+2}\equiv 4[9]$
لدينا: $2971\equiv 1[9]$ منه:
$2020^{2021}-1442^{6n+2}+2970\equiv(7-4+1)[9]$
أي: $2020^{2021}-1442^{6n+2}+2970\equiv 4[9]$

جـ تعيين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث: $2020^x+4^y+7\equiv 0[9]$:
$2020^x=2020^{9k-10}=2020^{3(3k-4)+2}\equiv 7[9]$
و $7\equiv 7[9]$ منه:
$2020^x+4^y+7\equiv(14+4^y)[9]$ اذن:
$4^y\equiv 4[9]$
أي: $y=3k'+1$ منه: $4k-5=3k'+1$ منه:
$4k=3k'+6=3(k'+2)$
حسب غوص 3 يقسم k أي:
$(x,y)=(9k-10;4k-5)$ مع: $k=3k'$ و $k'\in\mathbb{N}^*$.

التمرين الرابع:

1) أ- تبيان أن الدالة f مستمرة عند 0: $\lim_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$، ومنه: f مستمرة عند 0.
1) ب- دراسة قابلية اشتقاق f عند 0: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}=f'(0)$
ومنه: f قابلة للاشتقاق عند 0.

---

2) أ- حساب الدالة المشتقة:
f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$

2) ب- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$:
من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2\ge 0$ ومنه: $\sqrt{1+x^2}\ge 1$ و $1+\sqrt{1+x^2}\ge 2$.
أي: $\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\ge 2$ أي: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\le\frac{1}{2}$.
أي: $\left|\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\right|\le\frac{1}{2}$ ومنه: $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$.

2) جـ- جدول تغيرات الدالة f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \;;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$ ومنه: f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	2 ↘ 0

3) تبيان أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}65 < \alpha < 0{,}7$:

نضع: $h(x) = f(x) - x$، دالتها المشتقة $h'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h'(x) = f'(x) - 1$.

لدينا من 2) بـ- : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{3}{2} \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$

أي: $-\frac{3}{2} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}$ ومنه: $h'(x) < 0$. (h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$)

مبرهنة القيم المتوسطة: الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0{,}65\,;0{,}7[$ و $h(0{,}65) \times h(0{,}7) = 0{,}053 \times (-0{,}015) < 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ $(f(x) = x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}65 < \alpha < 0{,}7$ مع: $f(\alpha) = \alpha$.

4) أ- حساب $f(-x) + f(x)$:

من أجل x من $\mathbb{R}$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}$: $f(-x) + f(x) = 2$.

التفسير الهندسي: النقطة $\omega(0\,;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f.

4) بـ- معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 0:

$$(T): y = -\frac{1}{2}x + 1$$

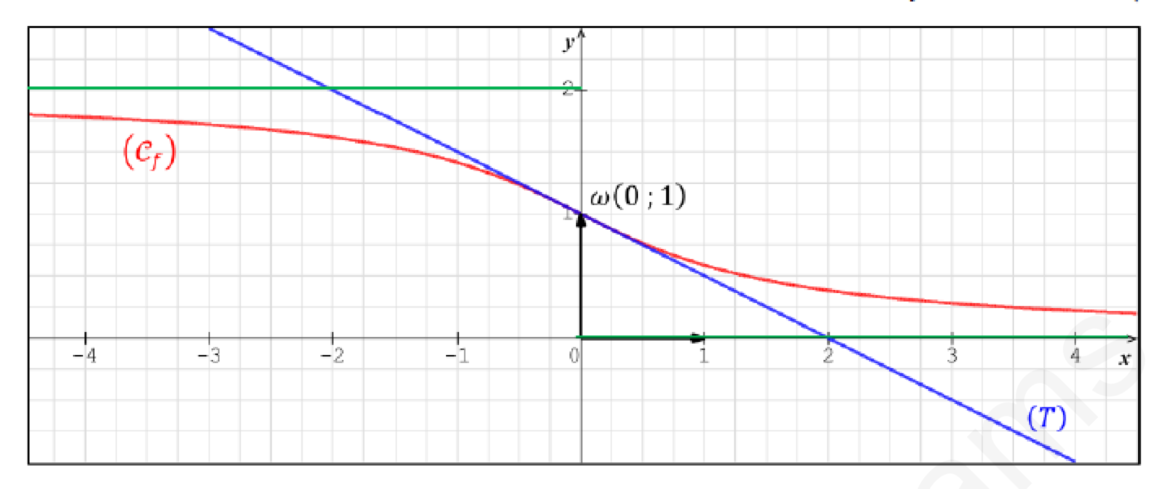
4) جـ- دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المماس (T):

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^3}{2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^2}$$

الوضعية:

- $x < 0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (أسفل) (T).
- $x = 0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقطع (يخترق) (T) في النقطة $\omega(0\,;1)$.
- $x > 0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (أعلى) (T).

5) إنشاء (T) و $(\mathcal{C}_f)$:



6) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$، وعليه:

$$|f(u_n)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

$$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \;;\; f(\alpha)=\alpha$$

6) ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_n-\alpha| \leq \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$|u_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1-\alpha|$$

$$\dots$$

$$|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1}-\alpha|$$

$$|u_n-\alpha| \leq \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

6) جـ- تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها:

متتالية متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ (باستعمال النهايات بالمقارنة).

مناقشة عدد و اشارة حلول المعادلة: $f(x) = -\frac{1}{2}x + e^m - 1$:

حلول المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}x + e^m - 1$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + e^m - 1$

مناقشة مائلة بالتوازي مع (T)

$e^m - 1$	-1	1	$+\infty$
عدد و اشارة الحلول	حل وحيد سالب	حل وحيد معدوم	حل وحيد موجب
m	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
عدد و اشارة الحلول	حل وحيد سالب	حل وحيد معدوم	حل وحيد موجب

ثانوية ابن عليوي صالح المستوي : 3 ت ر
2021/2020 المدة : ساعتين

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول (7 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0 = \frac{1}{5}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$

1/ بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$

2/ ا) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ب) بين ان المتتالية (U_n) متقاربة

3/ (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{3U_n}{1-2U_n}$

ا) اثبت ان المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول

ب) اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم بين ان $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$، احسب $\lim U_n$

4/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني (13 نقاط)

I g الدالة معرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x - (x-1)ln(x-1)$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} g(x)$ وبين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3/ ا) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α على $]1 ; +\infty[$ ، ثم تحقق ان $\alpha \in [e^2+1 ; e^3+1]$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II f الدالة المعرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{ln(x^2-1)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، وبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2/ ا) بين أنه من اجل كل x من $]1 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب) بين ان f متزايدة تماما على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}]$ و ومتناقصة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f

3/ بين أن $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

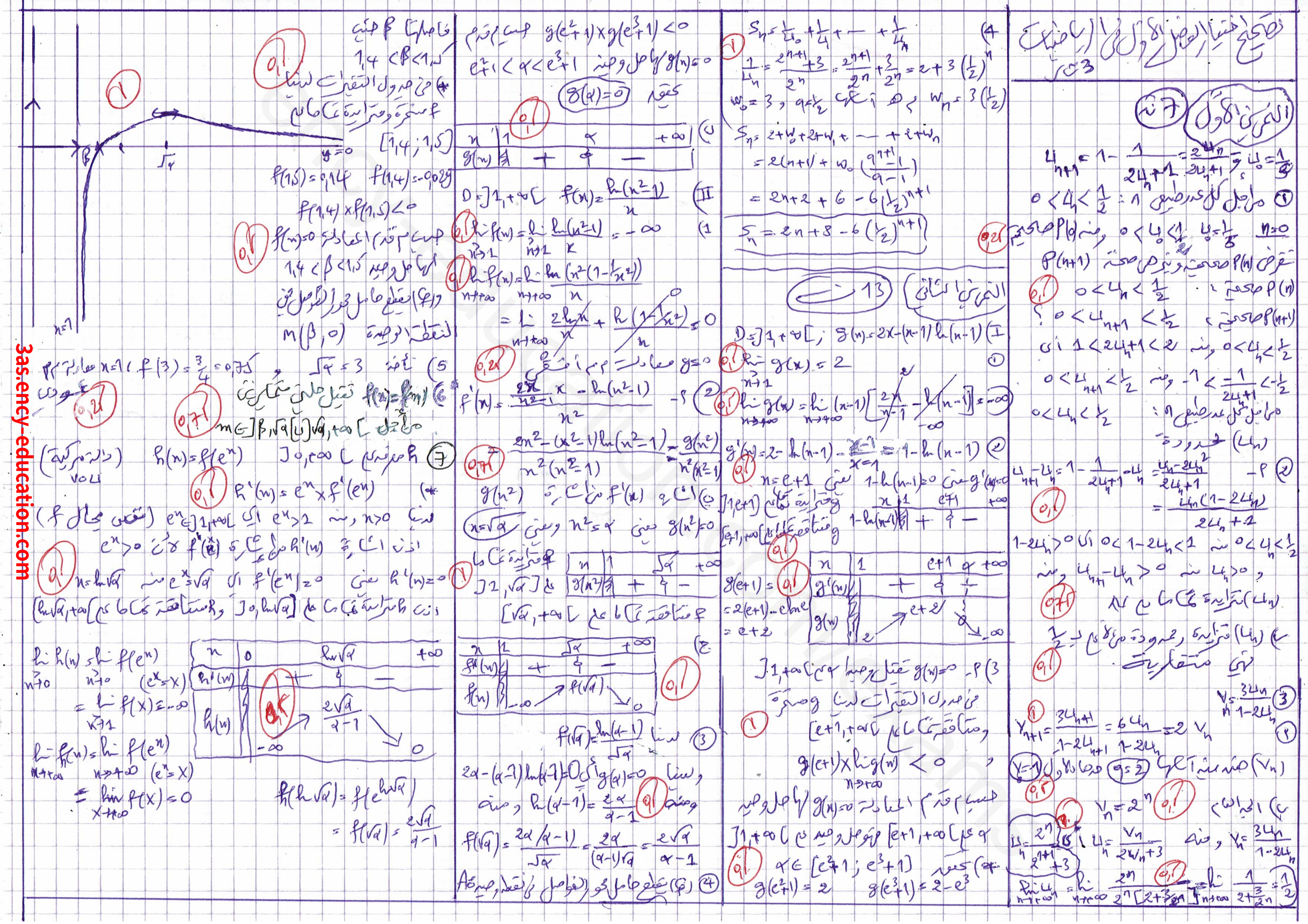
4/ بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها β حيث $1,4 < \beta < 1,5$

5/ ارسم (C_f) (نأخذ $\sqrt{\alpha} \simeq 3$)

6/ m وسيط حقيقي ، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين متمايزين

7/ h دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = f(e^x)$

ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)



تصحيح اختبار الفصل الأول في الرياضيات 3ع ت

التمرين الأول (7ن)

$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$ ، $u_0 = \frac{1}{3}$

1) من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$

من أجل $n=0$: $u_0=\frac{1}{3}$ ، $0<u_0<\frac{1}{2}$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة : $0<u_n<\frac{1}{2}$

$P(n+1)$ صحيحة : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ؟

$0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $1<2u_n+1<2$ أي $-1<\frac{-1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$ ومنه $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<\frac{1}{2}$

(u_n) محدودة

2-أ) $u_{n+1}-u_n = 1-\frac{1}{2u_n+1}-u_n = \frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

$0<u_n<\frac{1}{2}$ منه $0<1-2u_n<1$ أي $1-2u_n>0$ و $u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة

3) $v_n=\frac{3u_n}{1-2u_n}$

أ) $v_{n+1}=\frac{3u_{n+1}}{1-2u_{n+1}}=\frac{6u_n}{1-2u_n}=2v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=1$

ب) $v_n=2^n$

ج) $v_n=\frac{3u_n}{1-2u_n}$ ومنه $u_n=\frac{v_n}{2v_n+3}$ ، $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n\left[2+\frac{3}{2^n}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{2^n}} = \frac{1}{2}$

4) $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\dots+\frac{1}{u_n}$

$\frac{1}{u_n}=\frac{2^{n+1}+3}{2^n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}+\frac{3}{2^n}=2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$w_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ ، $w_0=3$

$S_n=2+w_0+2+w_1+\dots+2+w_n$

$=2(n+1)+w_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

$=2n+2+6-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$S_n=2n+8-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

التمرين الثاني (13ن)

I) $D=]1,+\infty[$; $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$

1) $\lim_{x\to1} g(x)=2$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\left[\frac{2x}{x-1}-\ln(x-1)\right]=-\infty$

2) $g'(x)=2-\ln(x-1)-\frac{x-1}{x-1}=1-\ln(x-1)$

$g'(x)=0$ يعني $1-\ln(x-1)=0$ يعني $x=e+1$

g متزايدة تماما على $]1,e+1]$ ومتناقصة تماما على $[e+1,+\infty[$

x	1	$e+1$	$+\infty$
$1-\ln(x-1)$	+	0	−

$g(e+1)=2(e+1)-e\ln e=e+2$

x	1		$e+1$		α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−		
$g(x)$	2	↗	$e+2$	↘	0	$-\infty$

3-أ) g(x)=0 تقبل حلا وحيدا في $]1,+\infty[$

من جدول التغيرات لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $[e+1,+\infty[$

و $g(e+1)\times\lim_{x\to+\infty} g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[e+1,+\infty[$ ومنه في $]1,+\infty[$

ب) $\alpha\in[e^2+1;e^3+1]$

$g(e^2+1)=2$ ، $g(e^3+1)=2-e^3$

لدينا $g(e^2+1)\times g(e^3+1)<0$ ومنه $e^2+1<\alpha<e^3+1$ وللمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد

$g(\alpha)=0$ محقق

ج)

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	

II) $D=]1,+\infty[$ ، $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$

1) $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x^2-1)}{x}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0$

y=0 معادلة مقارب أفقي

2) $f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2-1}x-\ln(x^2-1)}{x^2}=\frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x^2)$

$g(x^2)=0$ يعني $x^2=\alpha$ يعني $x=\sqrt{\alpha}$

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$g(x^2)$		+	0	−	

ج) f متزايدة تماما على $]1,\sqrt{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على $[\sqrt{\alpha},+\infty[$

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\sqrt{\alpha})$	↘	0

3) لدينا $f(\sqrt{\alpha})=\frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

ولدينا $g(\alpha)=0$ أي $2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0$ ومنه $\ln(\alpha-1)=\frac{2\alpha}{\alpha-1}$ ومنه

$f(\sqrt{\alpha})=\frac{2\alpha/(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}=\frac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}}=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4) تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها β حيث $1,4<\beta<1,5$

من جدول التغيرات لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,4;1,5]$

$f(1,5)=0,14$ ، $f(1,4)=-0,029$

$f(1,4)\times f(1,5)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $1,4<\beta<1,5$

و (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة الوحيدة $M(\beta,0)$

5) نأخذ $\sqrt{\alpha}=3$ ، $f(3)=\frac{3}{4}\approx0,75$ ، $x=1$ معادلة مقارب عمودي

6) $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين من أجل $m\in]\beta,\sqrt{\alpha}[\cup]\sqrt{\alpha},+\infty[$

7) h معرفة على $]0,+\infty[$ ، $h(x)=f(e^x)$ (دالة مركبة $v\circ u$)

$h'(x)=e^x\times f'(e^x)$

لدينا $x>0$ ومنه $e^x>1$ أي $e^x\in]1,+\infty[$ (مجال تعريف f)

إذن إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(e^x)$ لأن $e^x>0$

$h'(x)=0$ يعني $f'(e^x)=0$ أي $e^x=\sqrt{\alpha}$ ومنه $x=\ln\sqrt{\alpha}$

إذن h متزايدة تماما على $]0,\ln\sqrt{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على $[\ln\sqrt{\alpha},+\infty[$

$\lim_{x\to0} h(x)=\lim_{x\to0} f(e^x)$ ، $(e^x=X)$ ، $=\lim_{X\to1} f(X)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(e^x)$ ، $(e^x=X)$ ، $=\lim_{X\to+\infty} f(X)=0$

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	↘	0

$h(\ln\sqrt{\alpha})=f(e^{\ln\sqrt{\alpha}})=f(\sqrt{\alpha})=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية عين الدفلى

ثانوية حشامة بن عودة - سيدي لخضر - — المستوى : 3 تقني رياضي

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

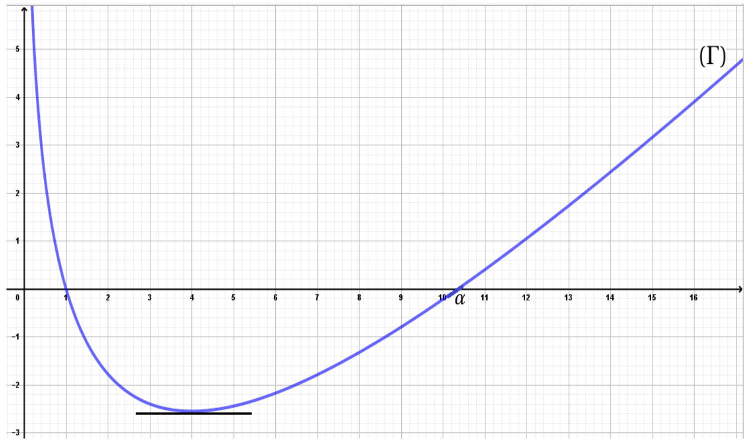
الـمـدة : 3 ساعات — السنة الدراسية : 2022 / 2023

التمرين الأول : إختر الإجابة الصحيحة مع التعليل

السؤال			
حل المعادلة التفاضلية $y'+2y-2=0$ و الذي يحقق $f(0)=0$ هو الدالة f	$f(x)=e^{-2x}-1$	$f(x)=-e^{-2x}-1$	$f(x)=-e^{-2x}+1$
الكتابة المبسطة للعدد A حيث: $A=ln(e+e^{-1}+2)-2ln(e+1)$ هي	$A=e+1$	$A=-1$	$A=0$
حلول المعادلة : $3^{2x}-7\times3^{x}+12=0$ في: $\mathbb{R}$ هي	$S=\{\frac{ln4}{ln3};1\}$	$S=\{ln\frac{4}{3};1\}$	$S=\varnothing$
معادلة محور تناظر منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=x^2-2x-ln(x-1)^2$ هي	$x=2$	$x=1$	$x=-1$
f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2(e^x)^2-e^x-3$ هي	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
مشتقة الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{\star}$ بـ : $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ هي	$f'(x)=\frac{ln3}{x^2}\times3^{\frac{1}{x}}$	$f'(x)=-\frac{ln3}{x^2}\times3^{\frac{1}{x}}$	$f'(x)=\frac{ln3}{2x^2}\times3^{\frac{1}{x}}$

التمرين الثاني :

الجزء الأول : (Γ) منحنى الدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :
$g(x)=x-1-4lnx$



بقراءة بيانية :

1. شكل جدول تغيرات الدالة g.
2. حدد إشارة كلا من $g(x)$ و $g'(x)$
3. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $g(x)=ln(m)$

الجزء الثاني : f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x^4}-(x-1)+4lnx$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f(x)=e^{g(x)}-g(x)$.
2. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
3. أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$.
4. استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
5. تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن : $e^x-2x>0$.
6. استنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ) .
7. أرسم (C_f) و (Γ) على المجال $]0;16]$

التمرين الثالث :

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1+x-xlnx$

1. أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها. علما أن : $\lim_{x\to0^+}xlnx=0$
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3.5<\alpha<3.6$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

الجزء الثاني :

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{lnx}{1+x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا. علما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^2}=0$
2. بين أن الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ثم بين أن : $f'(x)=\frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
4. عين بدون حساب $\lim_{x\to\sqrt{\alpha}}\frac{f(x)-f(\sqrt{\alpha})}{x-\sqrt{\alpha}}$ فسر النتيجة بيانيا .
5. بين أن : $f(\sqrt{\alpha})=\frac{1}{2\alpha}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\sqrt{\alpha})$.
6. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة 0.
7. أرسم (C_f) و (T).

   (Δ_m) المستقيم ذو المعادلة $y=mx-m$ حيث m وسيط حقيقي.

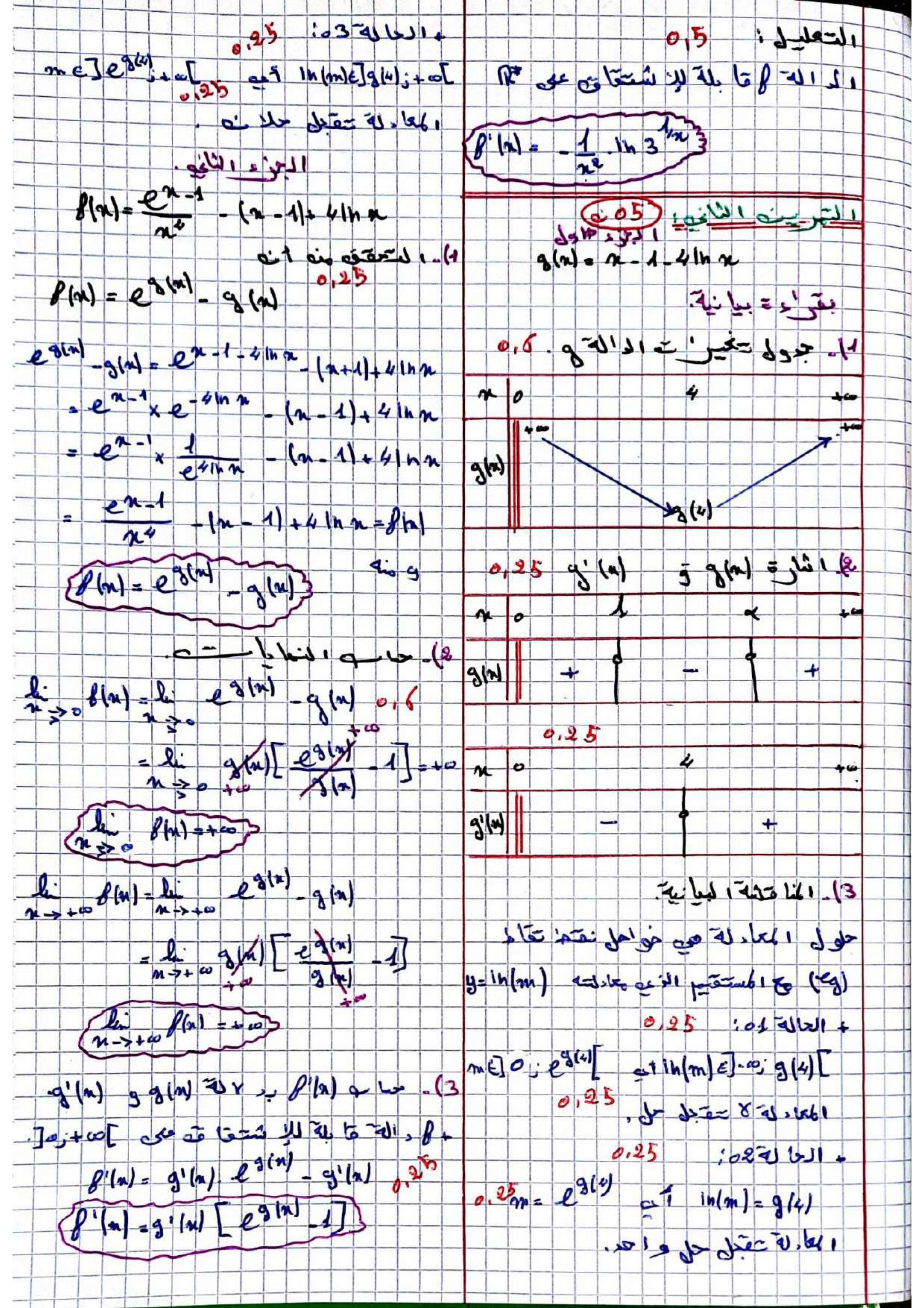
8. بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .
9. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $lnx=m(x-1)(1+x^2)$

الجزء الثالث : k دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $k(x)=\sqrt{[(f(x)]^2}$.

1. اشرح كيف يمكن إنشاء (C_k) منحنى الدالة k إنطلاقا من (C_f)

   h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(e^{-x})$

2. بدون حساب عبارة $h(x)$ بدلالة x أدرس تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.



التعليل : 0,5

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 3^{1/x}$$

التمرين الثاني (0,5)

الجزء الأول

$$g(x) = x - 1 - 4\ln x$$

بقراءة بيانية

1- جدول تغيرات الدالة g . 0,6

x	0		4		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(4)$	↗	$+\infty$

2- إشارة $g(x)$ و $g'(x)$ 0,25

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,25

x	0		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

3- المناقشة البيانية

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم الذي معادلته $y = \ln(m)$

+ الحالة 01: 0,25

$\ln(m) \in]-\infty; g(4)[$ أي $m \in]0; e^{g(4)}[$

المعادلة لا تقبل حل. 0,25

+ الحالة 02: 0,25

$\ln(m) = g(4)$ أي $m = e^{g(4)}$ 0,25

المعادلة تقبل حل واحد.

+ الحالة 03: 0,25

$\ln(m) \in]g(4); +\infty[$ أي $m \in]e^{g(4)}; +\infty[$ 0,25

المعادلة تقبل حلان.

الجزء الثاني

$$f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x$$

1- التحقق من أن: 0,25

$$f(x) = e^{g(x)} - g(x)$$

$$e^{g(x)} - g(x) = e^{x-1-4\ln x} - (x+1) + 4\ln x$$

$$= e^{x-1} \times e^{-4\ln x} - (x-1) + 4\ln x$$

$$= e^{x-1} \times \frac{1}{e^{4\ln x}} - (x-1) + 4\ln x$$

$$= \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x = f(x)$$

ومنه

$$f(x) = e^{g(x)} - g(x)$$

2- حساب النهايات 0,6

$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim_{x \to 0^{>}} e^{g(x)} - g(x)$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} g(x)\left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{g(x)} - g(x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} g(x)\left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1\right]$$

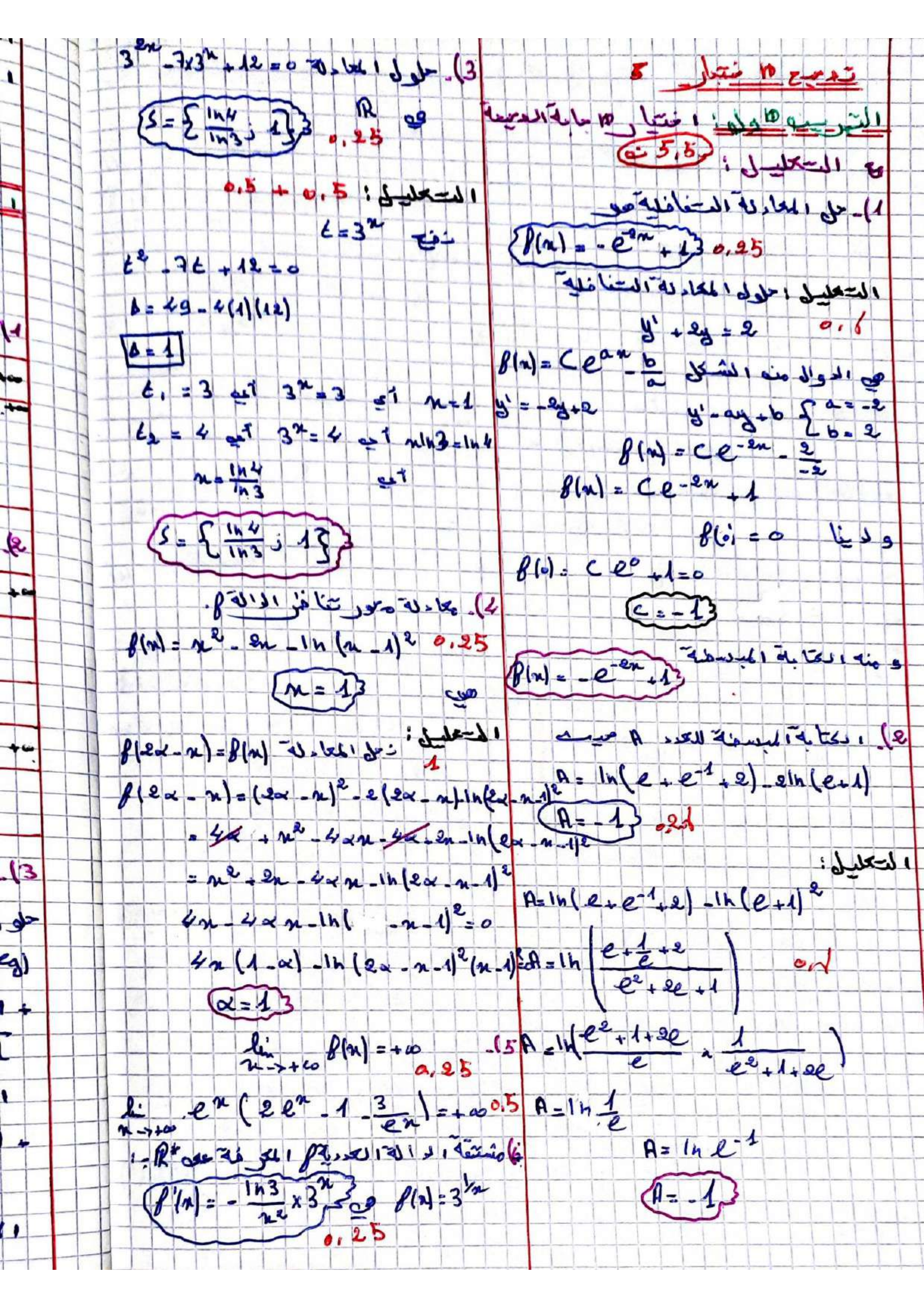
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3- حساب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$

+ f دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

$$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)} - g'(x) \quad 0,25$$

$$f'(x) = g'(x)\left[e^{g(x)} - 1\right]$$



تصحيح 15 اختبار 5

التمرين الأول: اختيار الإجابة الصحيحة (5,5 ن)

مع التعليل:

1) حل المعادلة التفاضلية هو $f(x) = -e^{-2x}+1$ 0,25

التعليل: حلول المعادلة التفاضلية $y'+2y=2$ 0,1

هي الدوال من الشكل $f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

$y'=-2y+2$ ، $y'=ay+b$ $\begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$

$f(x)=Ce^{-2x}-\frac{2}{-2}$

$f(x)=Ce^{-2x}+1$

ولدينا $f(0)=0$

$f(0)=Ce^{0}+1=0$

$C=-1$

ومنه الكتابة المبسطة $f(x)=-e^{-2x}+1$

2) الكتابة المبسطة للعدد A حيث $A=\ln(e+e^{-1}+2)-2\ln(e+1)$

$A=-1$ 0,25

التعليل:

$A=\ln(e+e^{-1}+2)-\ln(e+1)^2$

$A=\ln\left(\frac{e+\frac{1}{e}+2}{e^2+2e+1}\right)$ 0,1

$A=\ln\left(\frac{e^2+1+2e}{e}\times\frac{1}{e^2+1+2e}\right)$

$A=\ln\frac{1}{e}$

$A=\ln e^{-1}$

$A=-1$

3) حلول المعادلة $3^{2x}-7\times3^{x}+12=0$ في $\mathbb{R}$ هي $S=\left\{\frac{\ln4}{\ln3};1\right\}$ 0,25

التعليل: 0,5 + 0,5

نضع $t=3^{x}$

$t^2-7t+12=0$

$\Delta=49-4(1)(12)$

$\Delta=1$

$t_1=3$ أي $3^x=3$ أي $x=1$

$t_2=4$ أي $3^x=4$ أي $x\ln3=\ln4$

أي $x=\frac{\ln4}{\ln3}$

$S=\left\{\frac{\ln4}{\ln3};1\right\}$

4) معادلة محور تناظر الدالة f.

$f(x)=x^2-2x-\ln(x-1)^2$ 0,25

هي $x=1$

التعليل: نحل المعادلة $f(2\alpha-x)=f(x)$ 1

$f(2\alpha-x)=(2\alpha-x)^2-2(2\alpha-x)-\ln(2\alpha-x-1)^2$

$=4\alpha^2+x^2-4\alpha x-4\alpha+2x-\ln(2\alpha-x-1)^2$

$=x^2+2x-4\alpha x-\ln(2\alpha-x-1)^2$

$4x-4\alpha x-\ln(\quad-x-1)^2=0$

$4x(1-\alpha)-\ln(2\alpha-x-1)^2(x-1)^2=0$

$\alpha=1$

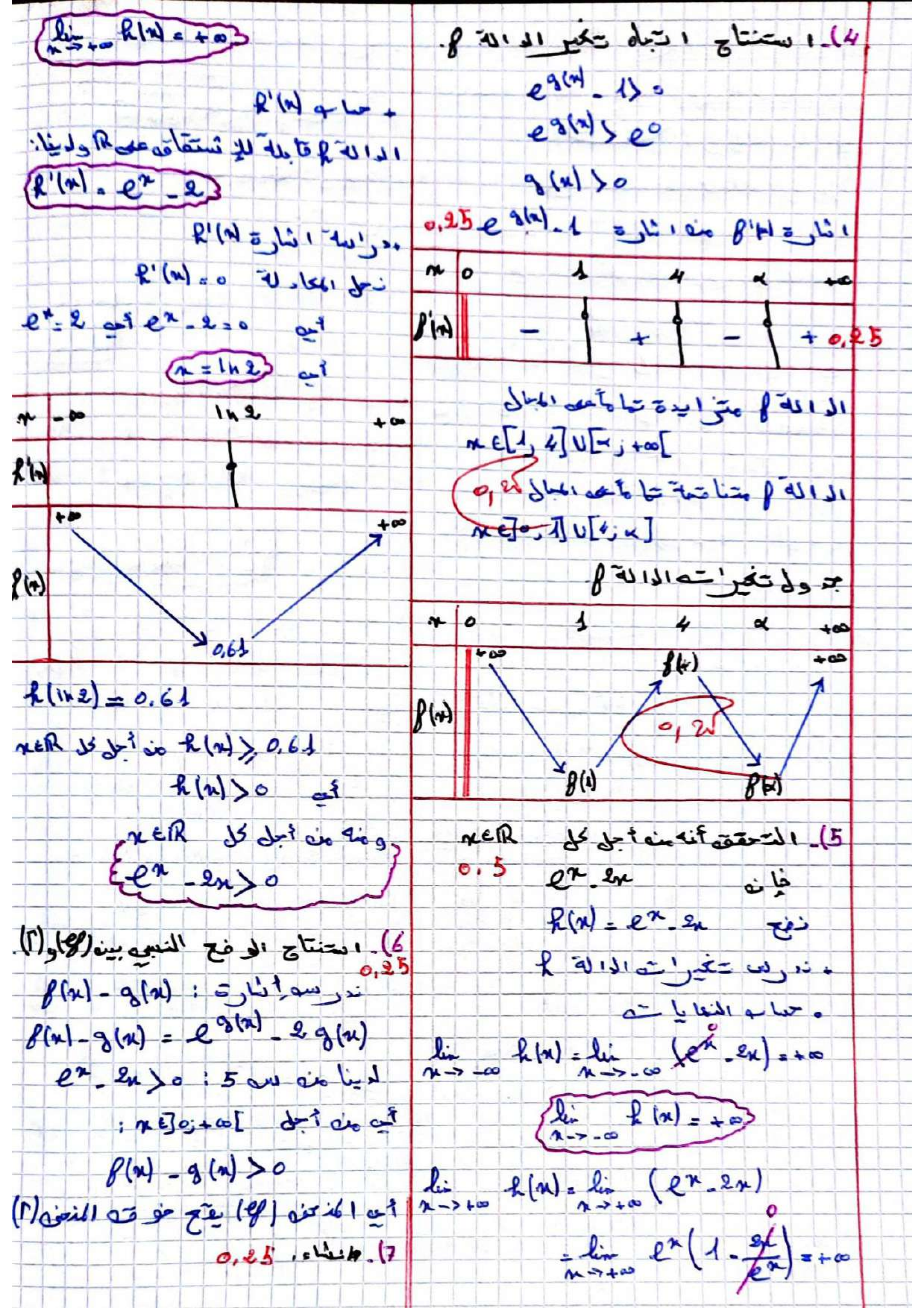
5) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(2e^{x}-1-\frac{3}{e^{x}}\right)=+\infty$ 0,5

6) مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$:

$f'(x)=-\frac{\ln3}{x^2}\times3^{\frac{1}{x}}$ هي $f(x)=3^{1/x}$

0,25



4) استنتاج اتجاه تغير الدالة f.

$e^{g(x)} - 1 > 0$

$e^{g(x)} > e^{0}$

$g(x) > 0$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{g(x)} - 1$ 0,25

x	0		1		4		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0,25

الدالة f متزايدة تماما على المجال $x \in [1; 4] \cup [\alpha; +\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $x \in]0; 1] \cup [4; \alpha]$ 0,25

جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		4		α		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$f(4)$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

0,25

5) التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ 0.5

$e^{x} - 2x$

نضع $h(x) = e^{x} - 2x$

• ندرس تغيرات الدالة h

• حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^{x} - 2x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^{x} - 2x)$

$= \lim_{x \to +\infty} e^{x}\left(1 - \frac{2x}{e^{x}}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

• حساب $h'(x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$h'(x) = e^{x} - 2$

• دراسة إشارة $h'(x)$

نحل المعادلة $h'(x) = 0$

أي $e^{x} - 2 = 0$ أي $e^{x} = 2$

أي $x = \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$			0		
$h(x)$	$+\infty$	↘	0,61	↗	$+\infty$

$h(\ln 2) = 0.61$

$h(x) \geq 0.61$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

أي $h(x) > 0$

ومنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$e^{x} - 2x > 0$

6) استنتاج الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ). 0,25

ندرس إشارة: $f(x) - g(x)$

$f(x) - g(x) = e^{g(x)} - 2g(x)$

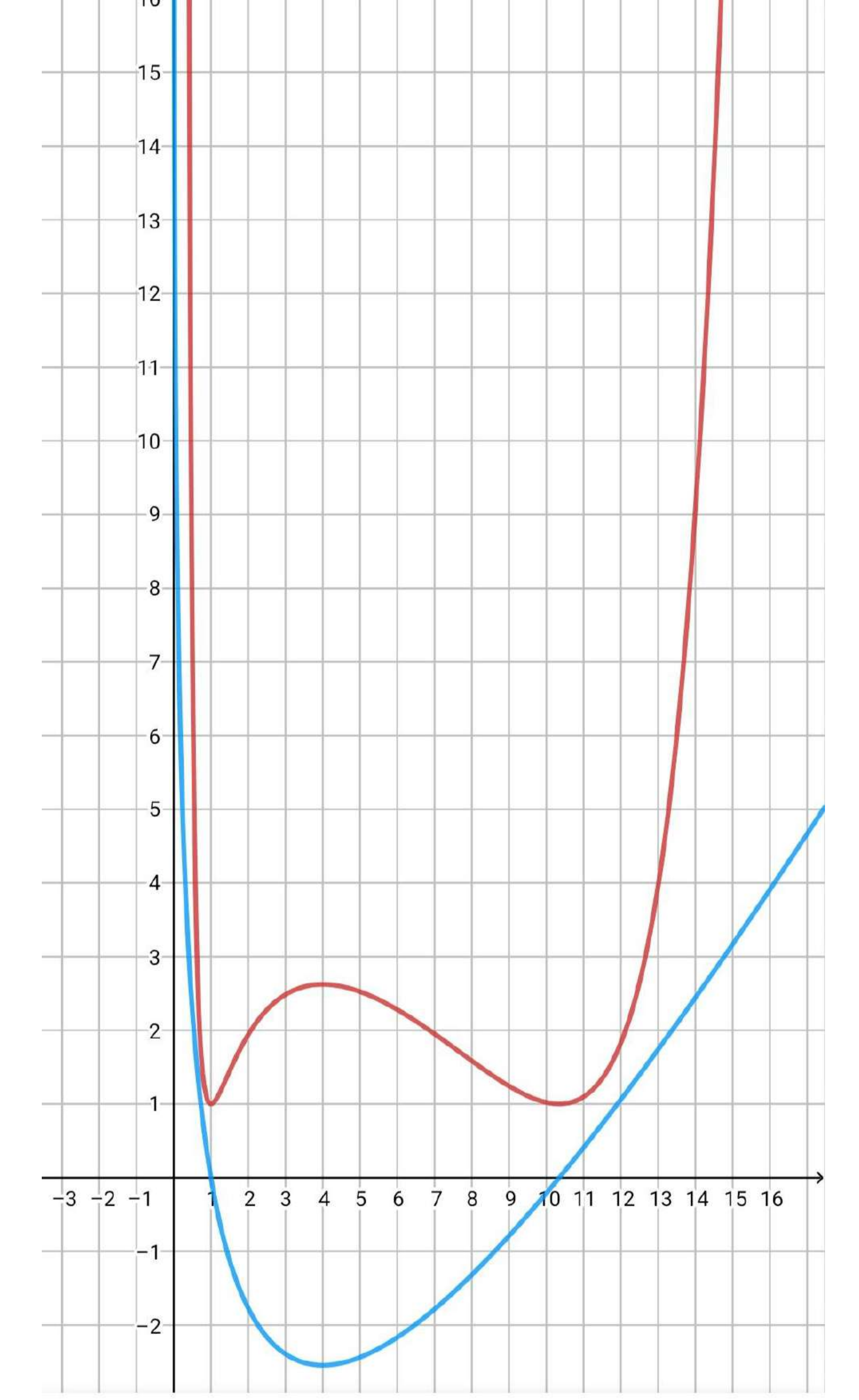
لدينا من س 5: $e^{x} - 2x > 0$

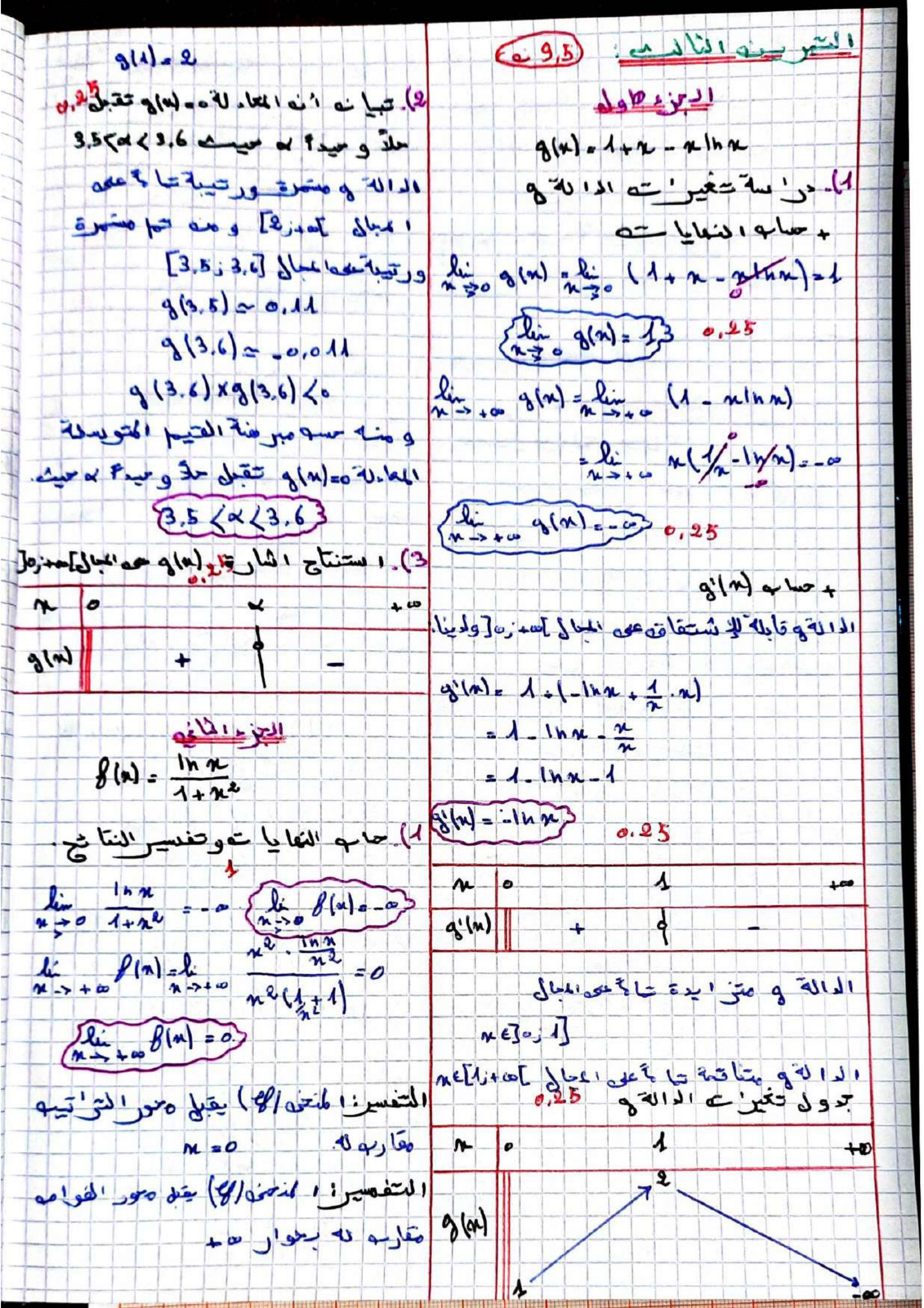
أي من أجل $x \in]0; +\infty[$:

$f(x) - g(x) > 0$

أي المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (Γ)

7) الإنشاء: 0,25


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



التمرين الثالث: (9,5 ن)

الجزء الأول

$$g(x) = 1 + x - x\ln x$$

1) دراسة تغيرات الدالة g

+ حساب النهايات

$$\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = \lim_{x \to 0^{>}} (1 + x - x\ln x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = 1$$ 0,25

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - x\ln x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$ 0,25

+ حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = 1 + \left(-\ln x + \frac{1}{x}\cdot x\right)$$

$$= 1 - \ln x - \frac{x}{x}$$

$$= 1 - \ln x - 1$$

$$g'(x) = -\ln x$$ 0,25

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $x \in]0;1]$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $x \in [1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g 0,25

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

$$g(1) = 2$$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,5 < \alpha < 3,6$ 0,25

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ومنه تم مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[3,5;3,6]$

$$g(3,5) \simeq 0,11$$

$$g(3,6) \simeq -0,011$$

$$g(3,6) \times g(3,6) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$3,5 < \alpha < 3,6$$

3) استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ 0,25

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$

1) حساب النهايات وتفسير النتائج. 1

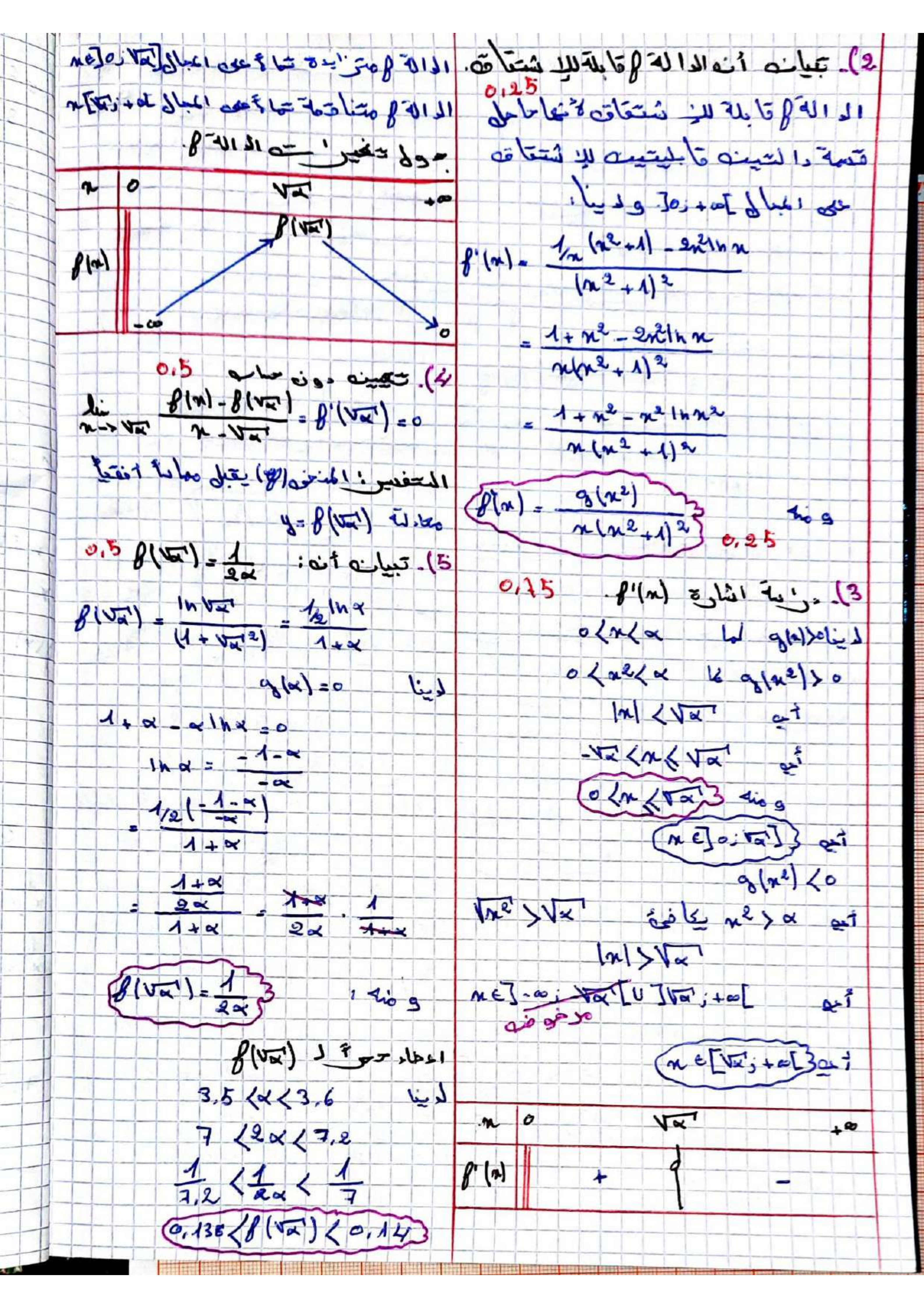
$$\lim_{x \to 0^{>}} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot \frac{\ln x}{x^2}}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

التفسير: المنحنى (C_f) يقبل محور التراتيب مقارب له $x = 0$

التفسير: المنحنى (C_f) يقبل محور الفواصل مقارب له بجوار $+\infty$



2). تبيان أنه الدالة f قابلة للاشتقاق. $0,25$

الدالة f قابلة للاشتقاق لأنها حاصل قسمة دالتين قابليتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2+1)-2x\ln x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1+x^2-x^2\ln x^2}{x(x^2+1)^2}$$

وعليه $f'(x)=\dfrac{g(x^2)}{x(x^2+1)^2}$ $0,25$

3). دراسة اشارة $f'(x)$. $0,75$

لدينا $g(x)>0$ لما $0<x<\alpha$

لما $g(x^2)>0$ $0<x^2<\alpha$

أي $|x|<\sqrt{\alpha}$

أي $-\sqrt{\alpha}<x<\sqrt{\alpha}$

ومنه $0<x<\sqrt{\alpha}$

أي $x\in]0;\sqrt{\alpha}]$

$g(x^2)<0$

أي $x^2>\alpha$ يكافئ $\sqrt{x^2}>\sqrt{\alpha}$

$|x|>\sqrt{\alpha}$

أي $x\in]-\infty;-\sqrt{\alpha}[\cup]\sqrt{\alpha};+\infty[$ (مرفوض)

أي $x\in[\sqrt{\alpha};+\infty[$

x	0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\sqrt{\alpha}]$ $x\in]0;\sqrt{\alpha}]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha};+\infty[$ $x\in[\sqrt{\alpha};+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\sqrt{\alpha})$	↘	0

4). تعيين دون حساب $0,5$

$$\lim_{x\to\sqrt{\alpha}}\frac{f(x)-f(\sqrt{\alpha})}{x-\sqrt{\alpha}}=f'(\sqrt{\alpha})=0$$

التفسير: المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا معادلته $y=f(\sqrt{\alpha})$

5). تبيان أنه: $f(\sqrt{\alpha})=\dfrac{1}{2\alpha}$ $0,5$

$$f(\sqrt{\alpha})=\frac{\ln\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha}^2)}=\frac{\frac{1}{2}\ln\alpha}{1+\alpha}$$

لدينا $g(\alpha)=0$

$1+\alpha-\alpha\ln\alpha=0$

$\ln\alpha=\dfrac{-1-\alpha}{-\alpha}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1-\alpha}{-\alpha}\right)}{1+\alpha}$$

$$=\frac{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}{1+\alpha}=\frac{1+\alpha}{2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\alpha}$$

ومنه $f(\sqrt{\alpha})=\dfrac{1}{2\alpha}$

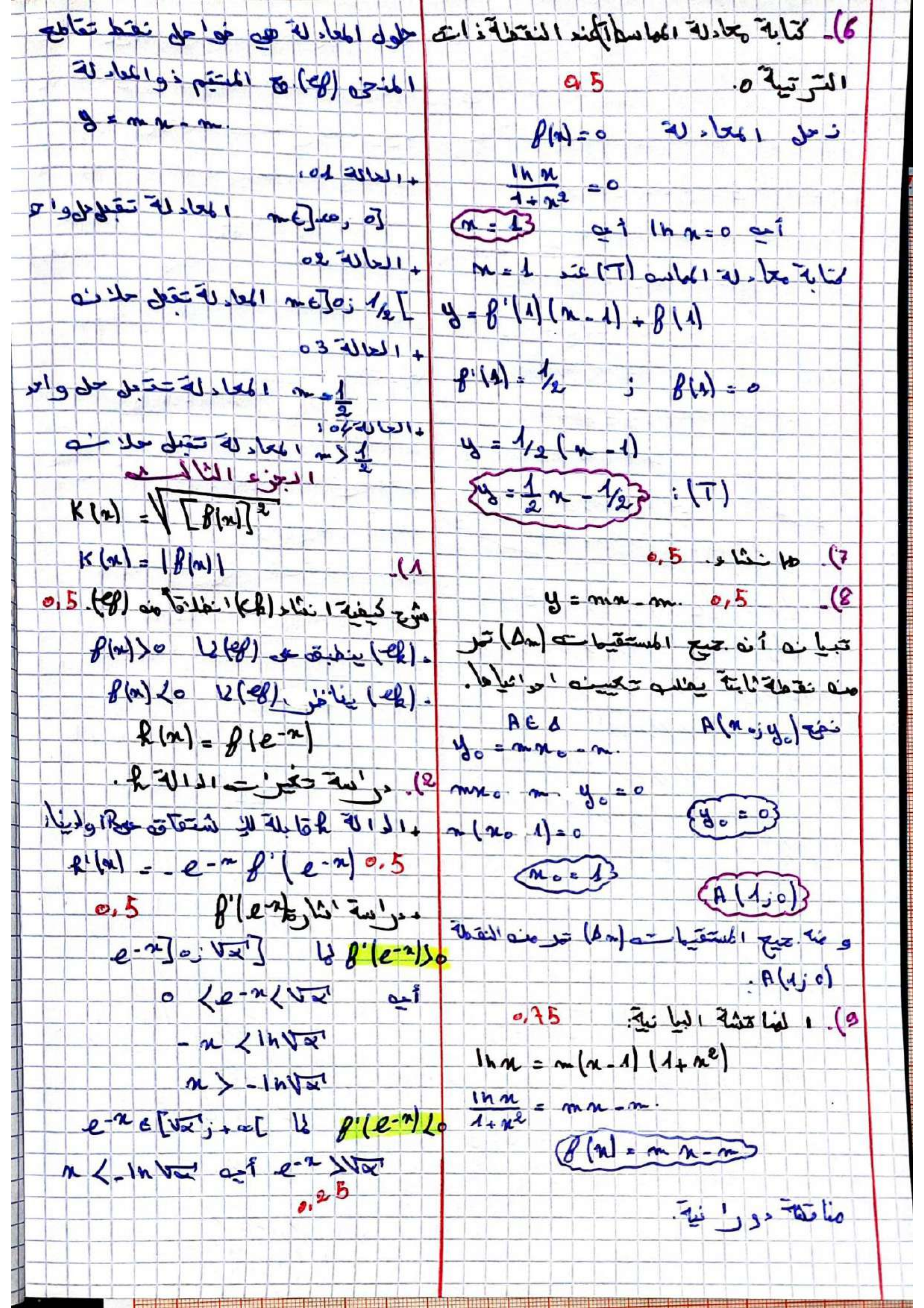
اعطاء حصر لـ $f(\sqrt{\alpha})$

لدينا $3,5<\alpha<3,6$

$7<2\alpha<7,2$

$\dfrac{1}{7,2}<\dfrac{1}{2\alpha}<\dfrac{1}{7}$

$0,138<f(\sqrt{\alpha})<0,14$



6)- كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الترتيبة 0. 0.5

نحل المعادلة $f(x)=0$

$$\frac{\ln x}{1+x^2}=0$$

أي $\ln x = 0$ أي $x=1$

كتابة معادلة المماس (T) عند $x=1$

$$y = f'(1)(x-1)+f(1)$$

$f'(1)=1/2$; $f(1)=0$

$$y = 1/2\,(x-1)$$

$$(T):\ y=\frac{1}{2}x-1/2$$

7)- الإنشاء. 0,5

8)- $y = mx - m$. 0,5

تبيان أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثياها.

نضع $A(x_0;y_0)$ ، $A \in \Delta$

$y_0 = mx_0 - m$

$mx_0 - m - y_0 = 0$ ، $y_0=0$

$m(x_0-1)=0$

$x_0 = 1$ ، $A(1;0)$

ومنه جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من النقطة $A(1;0)$.

9)- المناقشة البيانية: 0,75

$$\ln x = m(x-1)(1+x^2)$$

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = mx - m$$

$$f(x) = mx - m$$

مناقشة دورانية.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx - m$.

+ الحالة 01: $m \in]-\infty, 0]$ المعادلة تقبل حلا واحدا

+ الحالة 02: $m \in]0; 1/2[$ المعادلة تقبل حلان

+ الحالة 03: $m = \frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حل واحد

+ الحالة 04: $m > \frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلان

الجزء الثالث

$$K(x) = \sqrt{[f(x)]^2}$$

1)- $K(x) = |f(x)|$

شرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f). 0,5

- (C_k) ينطبق على (C_f) لما $f(x)>0$
- (C_k) يناظر (C_f) لما $f(x)<0$

$$h(x) = f(e^{-x})$$

2)- دراسة تغيرات الدالة h.

+ الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$h'(x) = -e^{-x} f'(e^{-x}) \quad 0,5$$

- دراسة اشارة $f'(e^{-x})$ 0,5

$f'(e^{-x})>0$ لما $e^{-x} \in]0; \sqrt{\alpha}]$

أي $0 < e^{-x} < \sqrt{\alpha}$

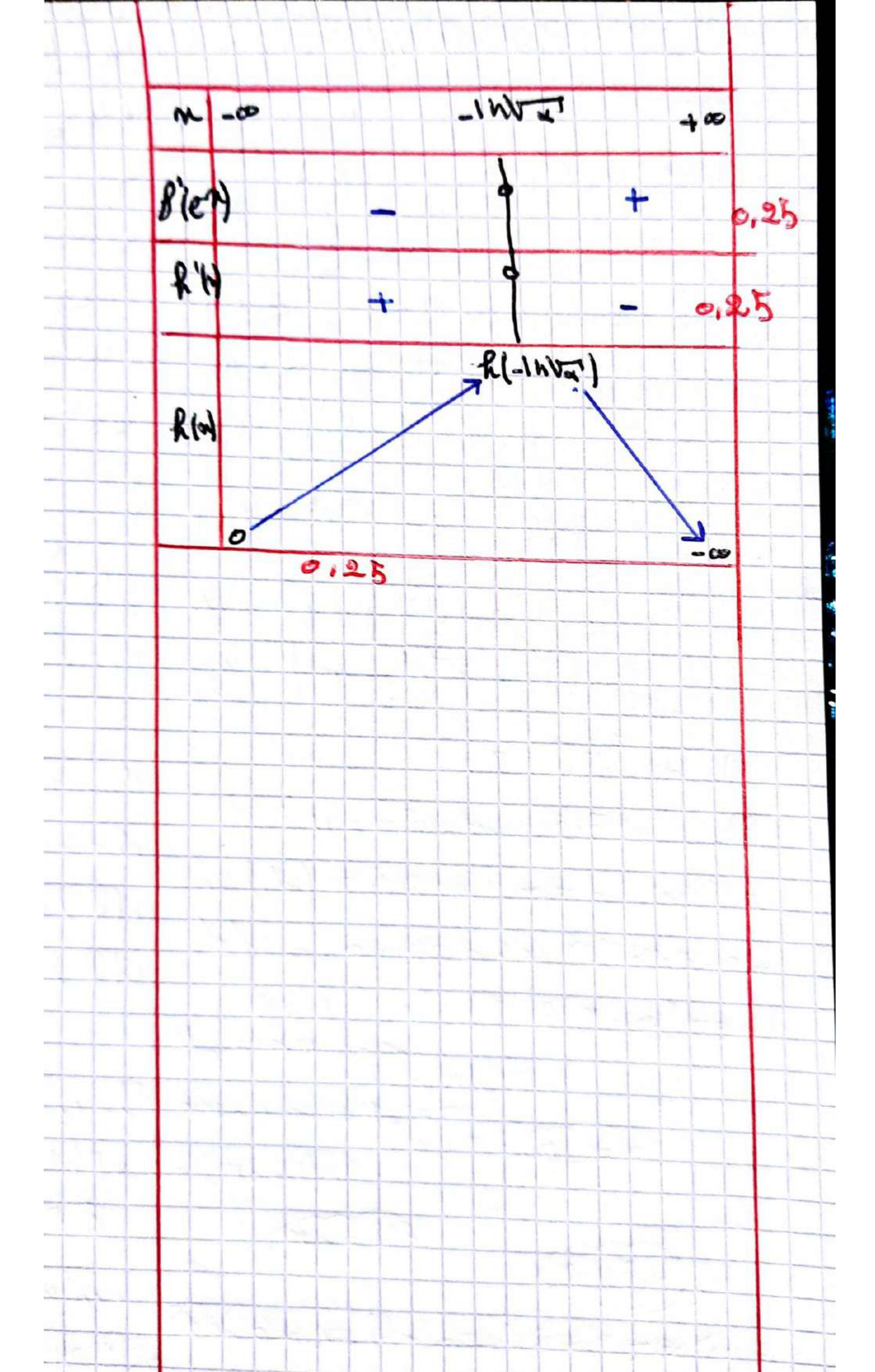
$-x < \ln\sqrt{\alpha}$

$x > -\ln\sqrt{\alpha}$

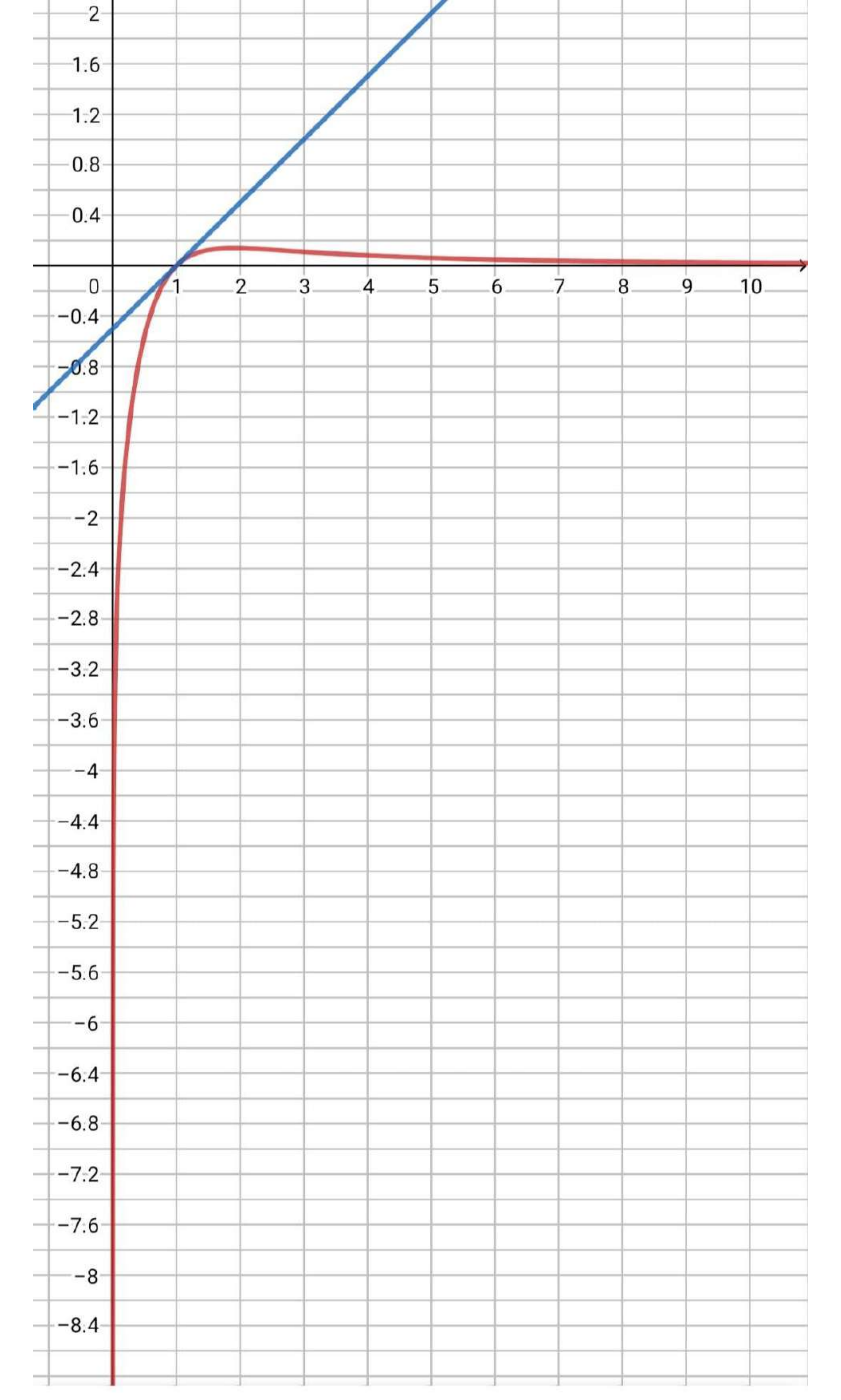
$f'(e^{-x})<0$ لما $e^{-x} \in [\sqrt{\alpha}; +\infty[$

أي $e^{-x} > \sqrt{\alpha}$ ، $x < -\ln\sqrt{\alpha}$

0,25



x
-∞
-ln√α
+∞
f'(e^x)
-
+
0,25
h'(x)
+
-
0,25
h(-ln√α)
h(x)
0
-∞
0,25


2
1.6
1.2
0.8
0.4
0
−0.4
−0.8
−1.2
−1.6
−2
−2.4
−2.8
−3.2
−3.6
−4
−4.4
−4.8
−5.2
−5.6
−6
−6.4
−6.8
−7.2
−7.6
−8
−8.4
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

السنة الثالثة تقني رياضي المدة : 02 ساعة	اختبار الفصل الأول في الرياضيات	ثانوية مليكة قايد – سطيف- 2022 - 2021

التمرين الأول 12ن :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

و (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1-عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$f(x)=ax+\frac{b}{3(e^x-1)}$$

2- أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

3- بين أن الدالة f متزايدة تماما عند كل مجال من مجالي مجموعة تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها

4- $(D);(D')$ المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+\dfrac{4}{3}$

بين أن $(D);(D')$ مقاربان للمنحني (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما

5- أ) أحسب من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x)+f(-x)$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) أحسب $f(\ln 3)$ ثم استنتج $f(-\ln 3)$ [تعطى قيم مضبوطة]

ج) بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث :

$$0,9<\alpha<0,91 \quad \text{و} \quad -1,66<\beta<-1,65$$

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 2 في نقطة فاصلتها x_0 حيث $x_0>0$

هـ) أكتب معادلة ديكارتية لـ (T)

و) أنشئ كلا من (T) ، $(D);(D')$ و (C_f)

ي) m عدد حقيقي ، ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=f(m)$

6- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كالتالي : $g(x)=f(\ln x)$

أدرس تغيرات الدالة g دون حساب عبارة $g(x)$ و شكل جدول تغيراتها

التمرين الثاني 08 ن :

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+x+2\ln x$

أ-ادرس اتجاه تغير الدالة g.

ب- احسب $g(1)$ ثم عين إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

جـ- استنتج أن: إذا كان $0<x<1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ و إذا كان $x>1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$

2. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

نرمز بـ $(\mathscr{C})$ إلى المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الأطوال $2cm$.

أ- احسب $f'(x)$ و تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f'(x)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$

ب- شكل جدول تغيرات f

جـ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α حيث $1,76<\alpha<1,77$

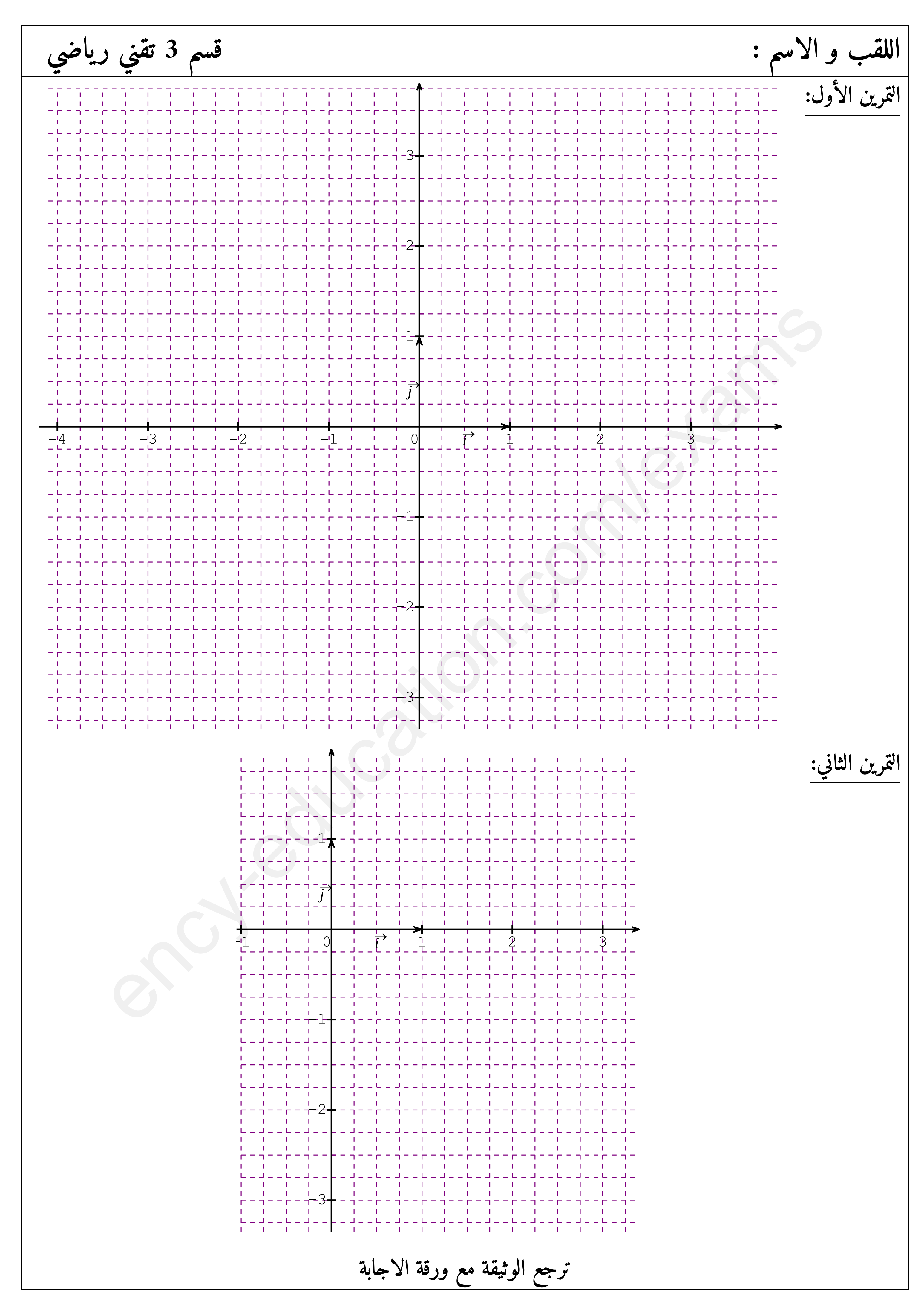
3. ا- نقبل أن معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة O هي : $y=x$

ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ(Δ).

ب- ارسم (Δ) و $(\mathscr{C})$.

اللقب و الاسم :   قسم 3 تقني رياضي

التمرين الأول:



التمرين الثاني:

ترجع الوثيقة مع ورقة الاجابة

تصحيح اختبار الفصل الأول في الرياضيات - 3 ت ر

التمرين الأول (09ن)

$f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$, $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

1) تعيين a و b: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$f(x) = \frac{3x(e^x-1)}{3(e^x-1)} - \frac{4}{3(e^x-1)} = x - \frac{4}{3(e^x-1)}$

$b = -4$, $a = 1$

2) أ- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ / $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ب- $\lim_{x \to 0^<} f(x) = -\infty$ / $\lim_{x\to 0^>} f(x) = +\infty$

$x=0$ معادلة م ، م موازي لحامل محور التراتيب

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x-1)^2}$

$f'(x) > 0$ منه f متزايدة تماما على كل من $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) (Δ) معادلته $y = x$ م م مائل عند $+\infty$ لأن

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{3(e^x-1)} = 0$

(D') معادلته $y = x + \frac{4}{3}$ م م مائل عند $-\infty$ لأن

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x + \frac{4}{3}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{3(e^x-1)} - \frac{4}{3} = 0$

ب) وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$3(e^x-1)$		−	0	+	
$\frac{-4}{3(e^x-1)}$		+	‖	−	

(C_f) تحت (D) في المجال $]0, +\infty[$

وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D')

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$3(e^x-1)$		−	0	+	
$\frac{-4}{3e^x-1}$		+	‖	−	

(C_f) فوق (D') في المجال $]-\infty, 0[$

5) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$f(x) + f(-x) = \left[x - \frac{4}{3(e^x-1)}\right] + \left[-x - \frac{4}{3(e^{-x}-1)} \times \frac{e^x}{e^x}\right]$

$= \frac{-4}{3(e^x-1)} + \frac{4e^x}{3(e^x-1)} = \frac{4}{3}$

ومنه النقطة $\Omega(0, \frac{2}{3})$ مركز تناظر (C_f)

ب) لدينا $f(-x) = \frac{4}{3} - f(x)$ و $f(\ln 3) = \ln 3 - \frac{2}{3}$

$f(-\ln 3) = \frac{4}{3} - \ln 3 + \frac{2}{3} = 2 - \ln 3$

ج) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,9 ; 0,91]$

$f(0,91) = 0,0117$, $f(0,9) = -0,013$

$f(0,9) \times f(0,91) < 0$ حسب م ق م $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,9 < \alpha < 0,91$ تحقق $f(\alpha) = 0$

f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,66 ; -1,65]$

$f(-1,65) = 0,00026$, $f(-1,66) = -0,13$

$f(-1,65) \times f(-1,66) < 0$ حسب م ق م المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1,66 < \beta < -1,65$ تحقق $f(\beta) = 0$

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $M_1(\alpha, 0)$ ، $M_2(\beta, 0)$

د) (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) : $f'(x) = 2$ أي $1 + \frac{4e^x}{3(e^x-1)^2} = 2$ أي

تكافئ $3e^{2x} - 10e^x + 3 = 0$ نضع $X = e^x$, $X > 0$

$3X^2 - 10X + 3 = 0$ / $\Delta = 64$ / $X_1 = \frac{1}{3}$, $X_2 = 3$

$X_1 = \frac{1}{3}$ أي $e^x = \frac{1}{3}$ أي $x = -\ln 3$ ، $X_2 = 3$ أي $e^x = 3$ أي $x = \ln 3$

عادة x_0 حيث أن $x_0 = \ln 3$

هـ) معادلة المماس (T) لـ (C_f)

$y = f'(\ln 3)(x - \ln 3) + f(\ln 3)$

$y = 2x - \ln 3 - \frac{2}{3}$

و) أرسم (T) و (C_f) (ع الوثيقة)

ي) المناقشة البيانية : $f(x) = f(m)$ من أجل $m \in \mathbb{R}^*$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

6) $D_g =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ ، $g(x) = f(\ln x)$

$g'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x)$

لدينا $\frac{1}{x} > 0$ على D_g إذن $g'(x)$ من إشارة $f'(\ln x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	‖	+	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ / $\lim_{x\to 1^<} g(x) = +\infty$ / $\lim_{x\to 1^>} g(x) = -\infty$

التمرين الثاني (08ن)

1) $D_g =]0, +\infty[$, $g(x) = -1 + x + 2\ln x$

2) أ) من أجل كل x من $]0, +\infty[$: $g'(x) = 1 + \frac{2}{x}$

$g'(x) > 0$ ، g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

ب) $g(1) = 0$ ،

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	−	0	+	

ج) إشارة $g(\frac{1}{x})$

$x \in]1, +\infty[$ معناه $0 < \frac{1}{x} < 1$ يعني $g(\frac{1}{x}) < 0$

أي $x > 1$

$0 < x < 1$ يعني $\frac{1}{x} > 1$ يعني $g(\frac{1}{x}) > 0$ (مقلوب)

$g(\frac{1}{1}) = g(1) = 0$

2) $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \; ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ ، $D = [0, +\infty[$

أ) من أجل كل x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = 1 - 2x\ln x - x$

$f'(x) = x\left[\frac{1}{x} - 2\ln x - 1\right]$

$= x\left[\frac{1}{x} + 2\ln\frac{1}{x} - 1\right] = x\, g(\frac{1}{x})$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

f متزايدة تماما على $[0, 1]$ ، f متناقصة تماما على $[1, +\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{1}{x} - \ln x\right] = -\infty$

د) f مستمرة ومتناقصة تماما على $[1,76 ; 1,77]$

$f(1,77) = -0,018$, $f(1,76) = 0,0088$

$f(1,76) \times f(1,77) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,76 < \alpha < 1,77$ تحقق $f(\alpha) = 0$

3) وضعية (C_f) و (Δ) ذو معادلة $y = x$

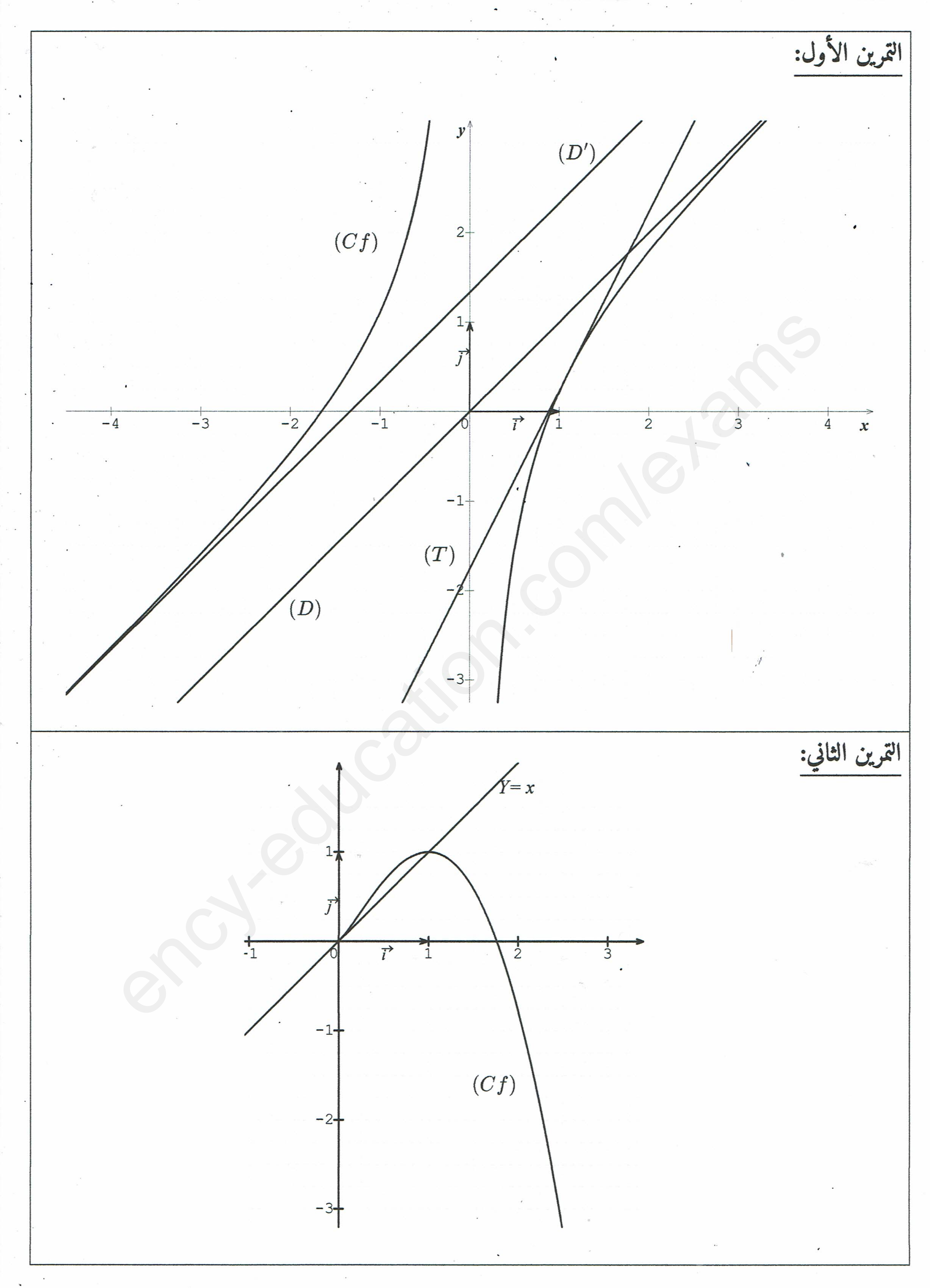
$f(x) - y = -x^2 \ln x$

x	0		1		$+\infty$
$-x^2$	0	−		−	
$\ln x$		−	0	+	
$-x^2\ln x$	0	+	0	−	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

(C_f) يتقاطع (Δ) في النقطتين $O(0,0)$ و $A(1,1)$.

ب) الرسم

0,5



التمرين الأول:
(Cf)
(D')
(D)
(T)
y
x
$\vec{i}$
$\vec{j}$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
التمرين الثاني:
$Y = x$
(Cf)
$\vec{i}$
$\vec{j}$
-1
0
1
2
3
-2
-3

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان الثلاثي الأول — يوم: 29 نوفمبر 2021

الشعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي — المستوى: السنة الثالثة

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: ثلاث ساعات

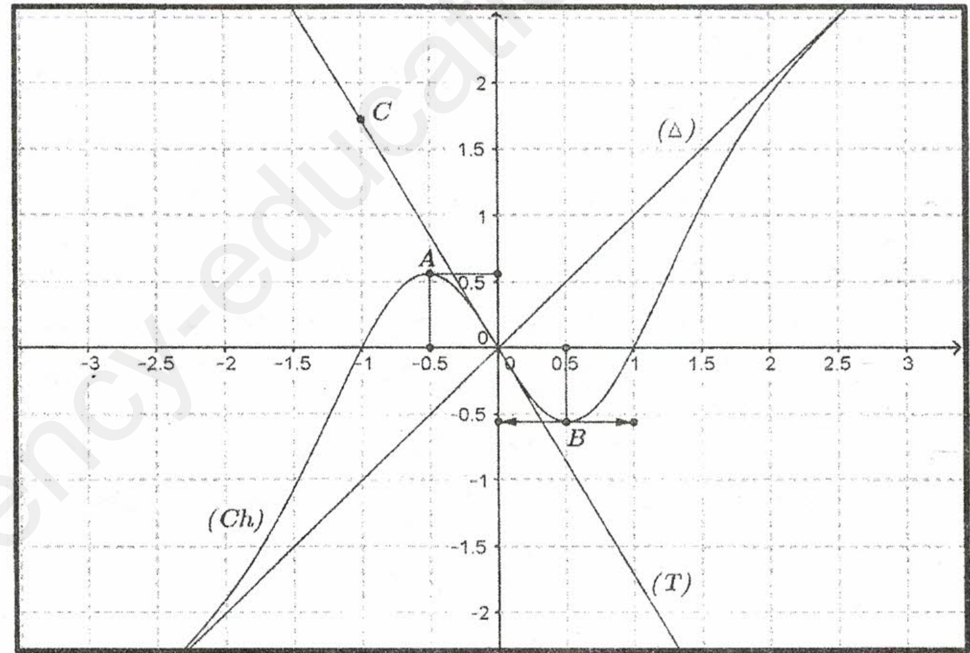
التمرين الأول: 03 نقاط

✓ أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. المعادلة ذات المجهول x حيث $2(\ln x)^2-\ln(x)-1=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما: 1 و e. (1)
2. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0;1\}$ بـ: $f(x)=(x-1)\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)-\ln(|x|)$. (1)
   - من أجل $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ لدينا: $f(1-x)=f(x)$.
3. نعتبر المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $(2e^x-2e)(e^{1-x}-1)>0$. (1)
   - مجموعة حلول هذه المتراجحة في مجموعة الأعداد الحقيقية هي: $]1;e[$.

التمرين الثاني: 07 نقاط

✓ في الشكل المقابل (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ و A، B، C ثلاث نقط حيث $A\left(-\frac{1}{2};0,56\right)$، $B\left(\frac{1}{2};-0,56\right)$، $C(-1;e-1)$، و (Δ)، (T) مستقيمان حيث (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_h) عند $+\infty$ و $-\infty$ معادلة له هي $y=x$ و (T) المماس لـ (C_h) في النقطة $O(0;0)$ مبدأ المعلم.



I. بقراءة بيانية أجب على الأسئلة التالية:

1. شكل جدول تغيرات الدالة h. (1)
2. حدد كلا من $h'\left(\frac{1}{2}\right)$ و $h'(0)$ ثم أكتب معادلة للمماس (T). (1)
3. حدد شفعية الدالة h مع التبرير. (0,8)

4. استنتج الوضع النسبي لـ (C_h) والمماس (T) ثم فسر النتيجة هندسيا.
5. حدد حسب قيم x إشارة كلا من $h(x)$ و $h(x)-x$.
6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $h(x)=mx$.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-h(|x|)$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
1. بين أن الدالة g زوجية ثم فسر النتيجة هندسيا.
2. أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم حدد طريقة لرسم (C_g) انطلاقا من (C_h).
3. أعد رسم (C_h) ثم أرسم (C_g).

التمرين الثالث: 10 نقاط

الجزء الأول: g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(1-x)e^{1-x}$.
1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,42<\alpha<0,44$.
ب) استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x-xe^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.
1. أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
ب) بين أن $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha-1}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
ج) عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
3. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.
ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).
4. أ) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له.
ب) عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات.
5. أ) أنشئ كلا من (Δ) و (T) ثم أرسم (C_f) نأخذ $f(\alpha)=-0,33$.
ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.
6. أدرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(-x)$ دون تعيين عبارتها.

التصحيح النموذجي لاختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة ثانوي — الأقسام: 3ع ت + 3ر

الحاسبة:

حل التمرين الأول:

الحاسبة بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1) خطأ: 0,25

التبرير: 0,75

لدينا المعادلة $2(\ln(x))^2-\ln x-1=0$ ① تكافئ $\begin{cases}2t^2-t-1=0 \; ②\\ t=\ln x\end{cases}$ بما أن $\Delta=9$ فإن المعادلة ② تقبل

حلين هما: $\begin{cases}t_1=-\frac{1}{2}\\ t_2=1\end{cases}$ ومنه من أجل $t=-\frac{1}{2}$ فإن $\ln x=-\frac{1}{2}$ أي $x=e^{-\frac{1}{2}}$

ومن أجل $t=1$ فإن $\ln x=1$ أي $x=e$

وبالتالي المعادلة ① تقبل حلين هما: $x=e^{-\frac{1}{2}}$ و $x=e$

2) صحيح 0,25

التبرير: 0,75

لدينا

$$f(1-x)=(1-x-1)\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|-\ln|1-x|$$

$$=-x\ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|-\ln|1-x|$$

$$=-x\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\ln|x-1|$$

$$=x\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\ln\left|x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right|$$

$$=x\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\ln|x|-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$=(x-1)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\ln|x|=f(x)$$

وبالتالي من أجل $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ فإن $f(1-x)=f(x)$

3) خطأ 0,25

التبرير 0,75

لدينا $(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)=0$ تكافئ أو $2e^{x}-2e=0$ معناه $x=1$

أو $e^{1-x}-1=0$ معناه $e^{1-x}=e^{0}$ أي $x=1$

وعليه إشارة العبارة $(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2e^{x}-2e$		$-$	0	$+$	
$e^{1-x}-1$		$+$	0	$-$	
$(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)$		$-$	0	$-$	

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة $(2e^{x}-2e)(e^{1-x}-1)>0$ في $\mathbb{R}$

هي $S=\{\phi\}$

حل التمرين الثاني:

I) الإجابة على الأسئلة قراءة بيانية:

A

1) تشكيل جدول تغيرات الدالة h:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$0,56$	↘	$-0,56$	↗	$+\infty$

2) تحديد كلا من $h'(\frac{1}{2})$ و $h'(0)$:

0,25

- $h'(\frac{1}{2})=0$ لأن المماس عند النقطة B موازي لحامل محور الفواصل

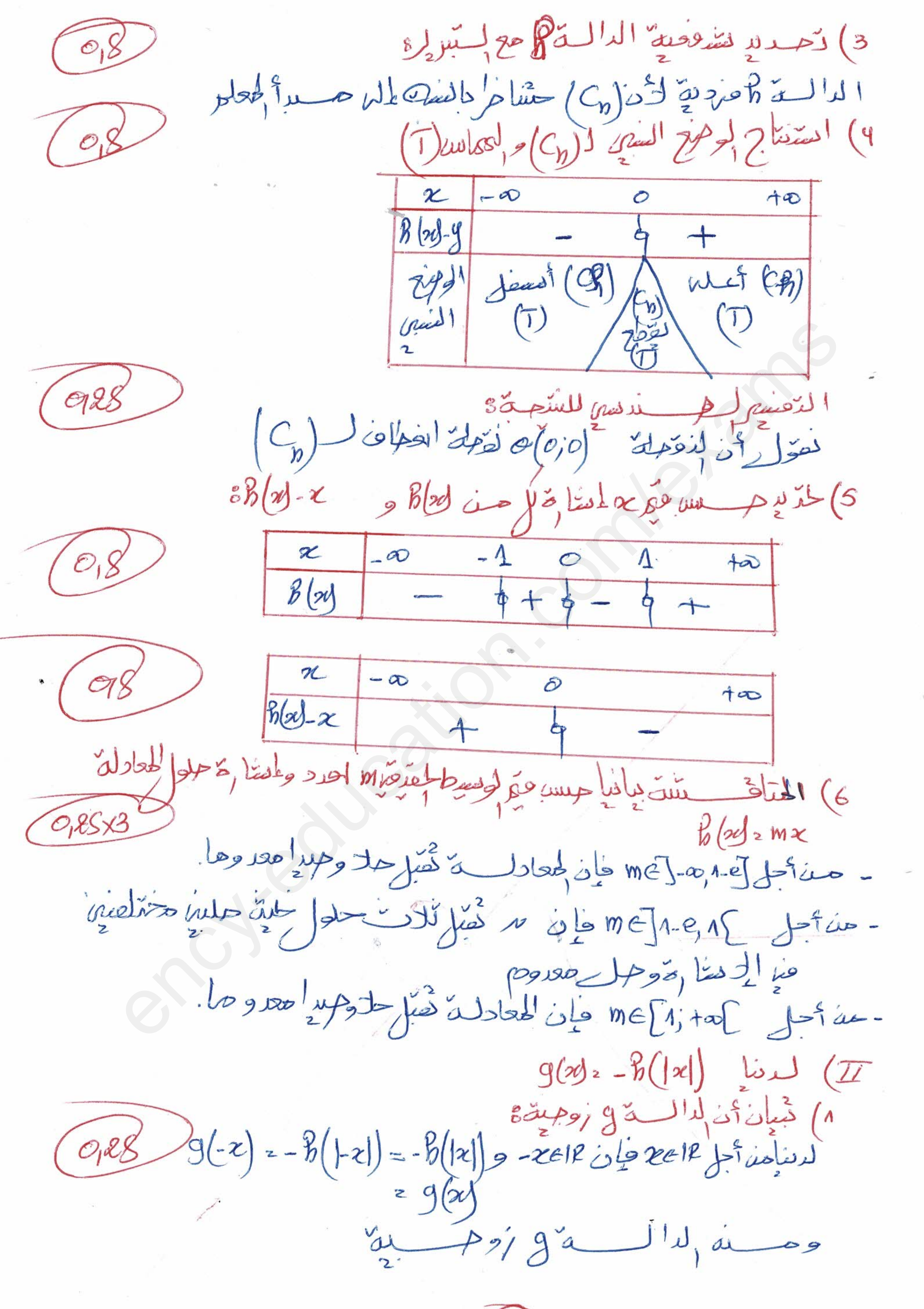
0,25

$$h'(0)=\frac{y_C-y_O}{x_C-x_O}=\frac{e-1}{-1}=1-e$$

0,25

كتابة معادلة للمماس (T):

$$y=(1-e)x$$



0,5

3) تحديد شفعية الدالة h مع التبرير

0,5

الدالة h فردية لأن (C_h) متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم

4) استنتاج الوضع النسبي لـ (C_h) و المماس (T)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_h) أسفل (T)	(C_h) يقطع (T)	(C_h) أعلى (T)

0,25

التفسير الهندسي للنتيجة:

نقول أن النقطة $O(0;0)$ نقطة انعطاف لـ (C_h)

5) تحديد حسب قيم x إشارة كل من $h(x)$ و $h(x)-x$:

0,5

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)-x$		$+$	0	$-$	

6) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

0,25x3

$h(x)=mx$

- من أجل $m\in]-\infty,1-e[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما.
- من أجل $m\in]1-e,1[$ فإن م تقبل ثلاث حلول حلين مختلفين في الإشارة وحل معدوم
- من أجل $m\in[1;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما.

II) لدينا $g(x)=-h(|x|)$

1) تبيان أن الدالة g زوجية:

0,25

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و $g(-x)=-h(|-x|)=-h(|x|)$
$=g(x)$

ومنه الدالة g زوجية

التفسير الهندسي للنتيجة:

(C_g) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.

0,25

2) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

لدينا

$$g(x) = \begin{cases} -h(x) \; ; \; x \geq 0 \\ -h(-x) \; ; \; x \leq 0 \end{cases}$$

0,5

تحديد مرافقة لرسم (C_g) انطلاقا من (C_h):

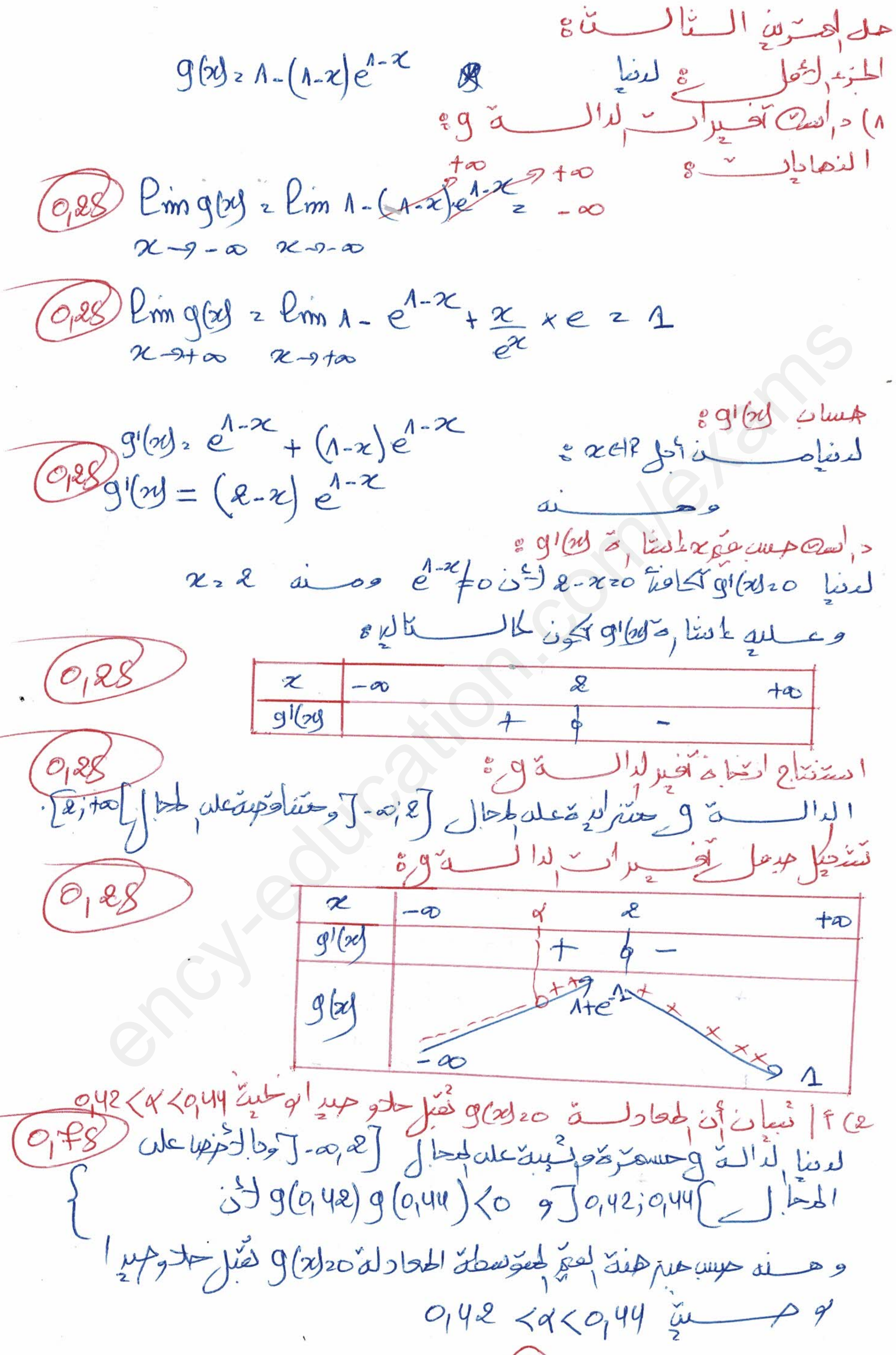
من أجل $x \geq 0$ فإن $g(x) = -h(x)$ ومنه (C_g) نظير (C_h) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0,+\infty[$

0,5

ولما أن الدالة g زوجية فإن (C_g) نظير جزء من (C_g) المرسوم في المجال $[0,+\infty[$ بالنسبة لحامل محور التراتيب:

0,5

3) اعادة رسم (C_h) ثم رسم (C_g)



حل التمرين الثالث:

الجزء الأول: لدينا $g(x)=1-(1-x)e^{1-x}$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات:

(0,25) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-(1-x)e^{1-x}=-\infty$

(0,25) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{1-x}+\frac{x}{e^{x}}\times e=1$

حساب $g'(x)$:

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$:

(0,25) $g'(x)=e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}$

ومنه $g'(x)=(2-x)e^{1-x}$

دراسة إشارة $g'(x)$:

لدينا $g'(x)=0$ تكافئ $2-x=0$ لأن $e^{1-x}\neq 0$ ومنه $x=2$

وعليه إشارة $g'(x)$ تكون كالتالي:

(0,25)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

(0,25) استنتاج اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty,2]$ ومتناقصة على المجال $[2;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

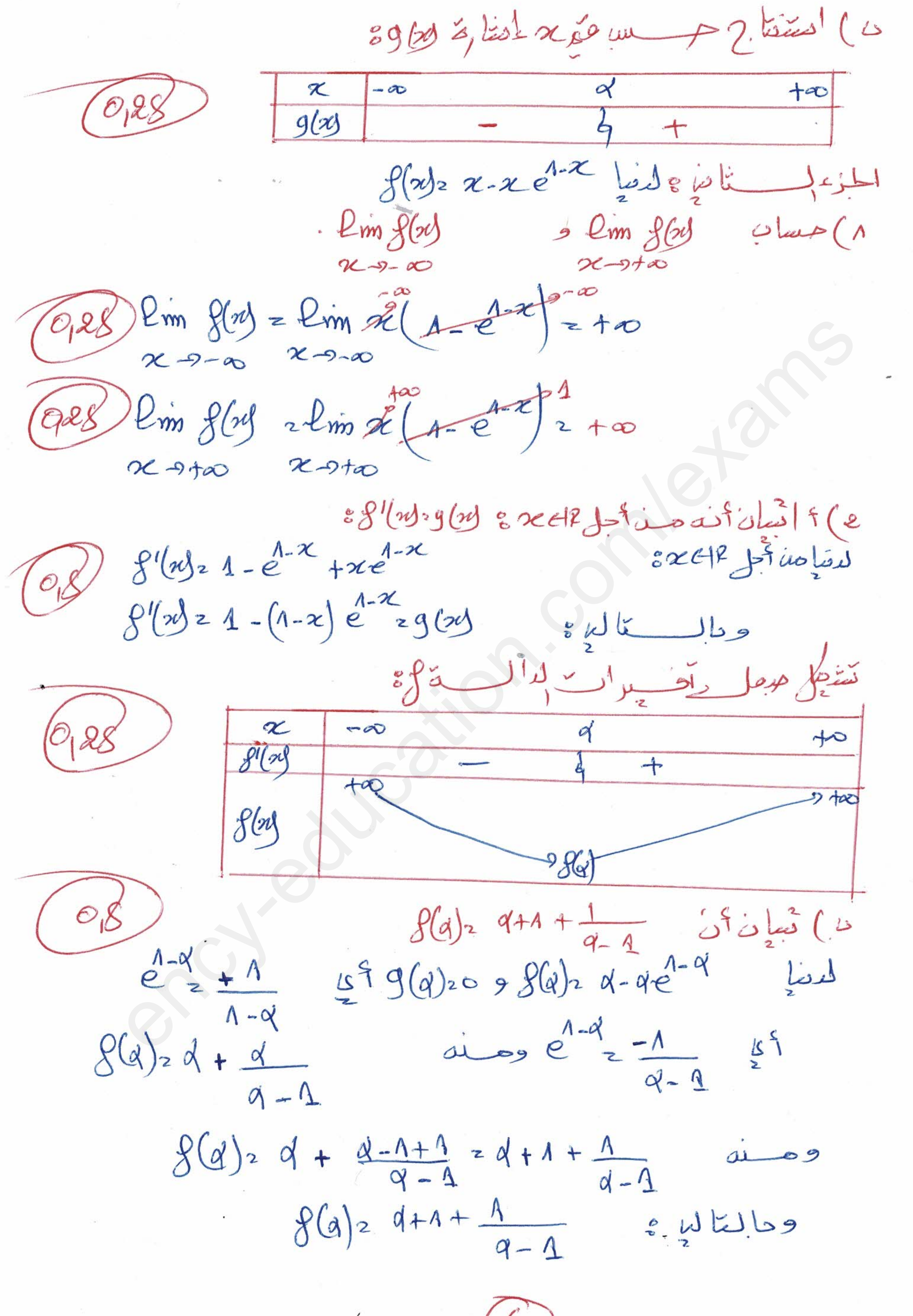
(0,25)

x	$-\infty$		α		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$1+e^{-1}$	↘	1

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,42<\alpha<0,44$

(0,75) لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty,2]$ وبالخصوص على المجال $]0,42;0,44[$ و $g(0,42)\,g(0,44)<0$ لأن

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,42<\alpha<0,44$



د) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

0,25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني: لدينا $f(x)=x-xe^{1-x}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

0,25 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-e^{1-x}\right)=+\infty$

0,25 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-e^{1-x}\right)=+\infty$

2) أ) إثبات أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$:

0,5 لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$:

$f'(x)=1-e^{1-x}+xe^{1-x}$

وبالتالي:

$f'(x)=1-(1-x)e^{1-x}=g(x)$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

0,25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

0,5

ت) تبيان أن $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha-1}$

لدينا $f(\alpha)=\alpha-\alpha e^{1-\alpha}$ و $g(\alpha)=0$ أي $e^{1-\alpha}=\frac{+1}{1-\alpha}$

أي $e^{1-\alpha}=\frac{-1}{\alpha-1}$ ومنه $f(\alpha)=\alpha+\frac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه $f(\alpha)=\alpha+\frac{\alpha-1+1}{\alpha-1}=\alpha+1+\frac{1}{\alpha-1}$

وبالتالي: $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha-1}$

0,5

إعطاء حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا $0{,}42 < \alpha < 0{,}44$ ومنه $1{,}42 < \alpha + 1 < 1{,}44$ ... ①

و $-0{,}58 < \alpha - 1 < -0{,}56$ ومنه $-1{,}79 < \dfrac{1}{\alpha - 1} < -1{,}72$ ... ②

بجمع ① و ② طرف مع طرف نجد: $-0{,}37 < f(\alpha) < -0{,}28$

0,25

ج) أحسبنا دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

لدينا $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$

ومنه $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$

0,25

التفسير الهندسي للنتيجة:

(C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α.

0,5

3) أ) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها:

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$

وعليه انطلاقا من إشارة $g'(x)$ نستنتج أن النقطة ذات الاحداثيات

$(e; f(e))$ أي $(e; e - e\,e^{-1})$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

0,25

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{e^x} \times e = 0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

0,5

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

لدينا $f(x) - x = 0$ تكافئ $x = 0$ لأن $e^{1-x} \neq 0$ وعليه الوضع النسبي نلخصه في الجدول التالي:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x) - y$	$+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_f) أعلى (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) أسفل (Δ)

4) 4/ تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له: 0,75

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $g(x)=1$ وتكافئ $1-(1-x)e^{1-x}=1$

أي $(1-x)=0$ لأن $e^{1-x}\neq 0$ ومنه $x=1$

وعليه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 1

حيث $y=x-1$ معادلة له

ب) تعيين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات:

لدينا $f(x)=0$ تكافئ $x(1-e^{1-x})=0$ أي $x=0$ أو $1-e^{1-x}=0$

معناه $e^{1-x}=e^{0}$ ومنه $x=1$ وعليه 0,5

$(C_f)\cap(xx')=\{(0;0);(1;0)\}$

لدينا $f(0)=0$ ومنه $(C_f)\cap(yy')=\{(0;0)\}$ 0,25

5) أ) انشاء كلا من (Δ) و (T) ثم تمثيل (C_f) 0,25×3

(C_f)

5) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين متمايزين.

لدينا من أجل $m\in\,]-1;0[$ فإن المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين متمايزين (موجبين).

0,25

6) دراسة اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(-x)$ دون تعيين عبارتها.

0,25

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $h'(x)=-f'(-x)$ وعليه $h'(x)=0$ تكافئ $-f'(-x)=0$ أي $g(-x)=0$ ومنه $-x=\alpha$ أي $x=-\alpha$

ولدينا $h'(x)>0$ تكافئ $f'(-x)<0$ أي $g(-x)<0$ ومنه $-x<\alpha$ أي $x>-\alpha$

وعليه إشارة $h'(x)$ تكون كالتالي:

0,5

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

0,25

ومنه الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة على المجال $[-\alpha;+\infty[$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة



ثانويـة: زانة البيضاء الجديدة

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

الموسم الدراسي: 2022/2021

الشعبة: الثالثة علوم تجريبية وتقني رياضي

المدة: 03 سا

التمرين الأول: (05 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{x\ln 2}-\ln\frac{3}{2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=y\ln 2+\ln 3$.

2) عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 3^{2022} هو: 964.

3) المعادلة: $e^{3x}+e^{2x}-6e^{x}=0$ تقبل حلين متمايزين في $\mathbb{R}$ هما $\ln 2$ و $-\ln 3$.

4) الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$

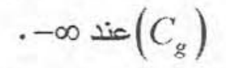
تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس يقبل محور تناظر $x=2$ معادلة له.

5) الدالة العددية h المعرفة على $[-\pi;\pi]$ بـ: $h(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}; & x\neq 0\\ 2 ; & x=0\end{cases}$ ، مستمرة في 0.

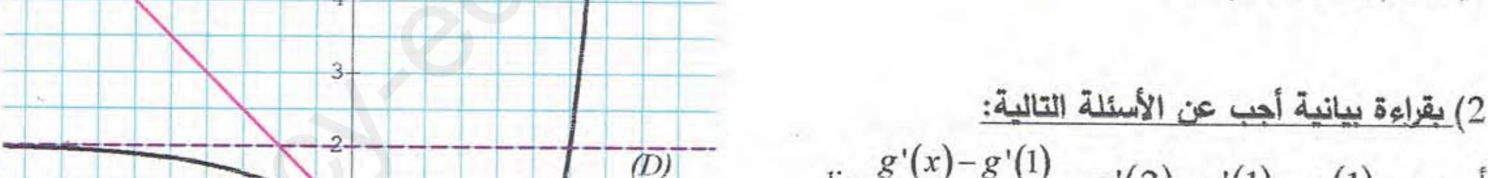
التمرين الثاني:(08 نقاط)

الجزء الأول:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. في الشكل المرفق، (C_g) هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-3)e^{x-1}+2$ و (T) هو مماس (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1 و (D) هو المستقيم المقارب لـ (C_g) عند $-\infty$.



1) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,5<\alpha<2,6$.



2) بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

أ. عين: $g(1)$ ، $g'(1)$ ، $g'(2)$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1}$.

ب. أكتب معادلة لـ (T).

ج. أنجز جدول تغيرات الدالة g.

د. استنتج تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

3) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا تبعا لقيم m عدد حلول المعادلة $g(x)=m(x-1)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-4)e^{x-1}+2x-1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ. أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم فسر بيانيا النتيجتين المحصل عليهما.

ب. بين أن المستقيم (Δ) حيث $y=2x-1$ معادلة له مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ج. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

2) أ. بين أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3) أ. بين أن: $f(\alpha)=2\alpha-3+\dfrac{2}{\alpha-3}$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $3{,}5\prec\beta\prec3{,}6$.

ج. أنشئ (Δ)، ثم مثل بيانيا (C_f).

التمرين الثالث:(07 نقاط)

I. في الشكل المرفق، (C) هو التمثيل البياني للدالة العددية $x\mapsto\ln x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(أنظر الصفحة 3 من 3)**

نعتبر الدالتين العدديتين k و g المعرفتين على كل من المجالين $]-1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ بـ: $k(x)=\ln(1+x)+1$ و $g(x)=\ln(1-x)+1$ على الترتيب. (C_k) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في نفس المستوي السابق.

1) اشرح كيفية تمثيل بيانيا (C_k) انطلاقا من (C)، ثم مثله.

2) بين أن: (C_g) هو نظير (C_k) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب، ثم مثله.

II. جدول التغيرات التالي هو للدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\ln(1-x)$

حيث: (C_f) تمثيليهما البياني في نفس المستوي السابق.

x	$-\infty$		-3		-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}+ln4$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

1) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))$، ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

2) أدرس الوضعية النسبية لكل من (C_f) و (C_g).

3) مثل بيانيا (C_f).

III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على D بـ: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ حيث: $D=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]1;+\infty[$.

1) باستعمال مبرهنة نهاية مركب دالتين أحسب نهايات الدالة h عند الأطراف المفتوحة لمجالات مجموعة تعريفها.

2) أ. تحقق أن: من أجل كل $x\in D$: $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

ب. عين إشارة $f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ على D.

3) استنتج جدول تغيرات الدالة h.

(C)

(C)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة | ثانوية: زانة البيضاء الجديدة



الشعبة: الثالثة علوم تجريبية، تقني رياضي | الموسم الدراسي: 2022/2021

إجابة مقترحة لاختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

حل التمرين الأول:

الاجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير:

العبارة	الحكم	التبرير
01	خاطئة	• لدينا، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = e^{x\ln 2} - \ln\frac{3}{2}$ ومنه، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{x\ln 2} = f(x) + \ln\frac{3}{2}$ • ولدينا من جهة أخرى: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{x\ln 2} \cdot \ln 2$ $= (f(x) + \ln\frac{3}{2})\ln 2$ $= f(x)\ln 2 + \ln(\frac{3}{2})\ln(2)$ إذن: $f'(x) \neq f(x)\ln 2 + \ln 3$ وبالتالي f ليست حل للمعادلة التفاضلية $y' = y\ln 2 + \ln 3$
02	خاطئة	لدينا: $[\log 3^{2022}] = 964$ نعلم أن: $[\log 3^{2022}] \leq \log 3^{2022} < [\log 3^{2022}] + 1$ أي: $964 \leq \log 3^{2022} < 965$ $\log 10^{964} \leq \log 3^{2022} < 10^{965}$ $10^{964} \leq 3^{2022} < 10^{965}$ ومنه عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 3^{2022} هو 965
03	خاطئة	تكافئ $e^{3x} + e^{2x} - 6e^{x} = 0$: $e^{x}(e^{2x} + e^{x} - 6) = 0$ $e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$ ...(*) نضع، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $t = e^{x}$ (أي، من أجل كل $t \in]0;+\infty[$ ، $x = \ln t$)

(*) تكافئ:
$$\begin{cases} t = e^x \\ t^2 + t - 6 = 0 \quad ...(**) \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ | $a = 1;\ b = 1;\ c = -6$

$\Delta = 25$

بما أن: $\Delta > 0$ فإن (**) تقبل حلين متمايزين:

$$\begin{cases} t = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \\ \text{أو} \\ t = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (*) هي S حيث:

$S = \{\ln 2\}$.

صحيحة. لنبين: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:		04

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

$= \sqrt{(x-2)^2 - 4 + 5}$

$g(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 1}$

إذا كان: $x \in \mathbb{R}$ فإن: $4 - x \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$g(4-x) = \sqrt{(4-x-2)^2 + 1}$

$= \sqrt{(2-x)^2 + 1}$

$= \sqrt{(x-2)^2 + 1}$

$= g(x)$

وبالتالي (C) يقبل المستقيم حيث: $x = 2$ معادلة له محور تناظر له.

صحيحة		05

لدينا: $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين من الشكل

إزالتها:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = h(0)$$

وبالتالي h مستمرة في "0".

حل التمرين الثاني:

الجزء الأول:

1) إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2,5 < \alpha < 2,6$

الدالة g معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا على المجال $[2,5 ; 2,6]$

وبما أن: $g(2,5) \times g(2,6) < 0$

لأن: $g(2,5) \simeq -0,24$ و $g(2,6) \simeq 0,02$

فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]2,5 ; 2,6[$

وبما أن الدالة g متزايدة تماما على $[2,5 ; 2,6]$

فإن هذا الحل وحيد نرمز إليه بالرمز α ($g(\alpha)=0$)

تبرير كون الدالة g متزايدة تماما على المجال $[2,5 ; 2,6]$:

لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = e^{x-1} + (x-3)e^{x-1}$
$= (x-2)e^{x-1}$

وعليه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-2$

وبالتالي: من أجل كل $x \in [2,5 ; 2,6]$: $g'(x) > 0$

أي أن الدالة g متزايدة تماما على $[2,5 ; 2,6]$.

2) تعيين: $g(1)$، $g'(1)$، $g'(2)$ و $\lim\limits_{x \to 1} \frac{g'(x)-g'(1)}{x-1}$

- $g(1) = 0$
- $g'(1)$ بيانيا هو معامل توجيه المماس (T)

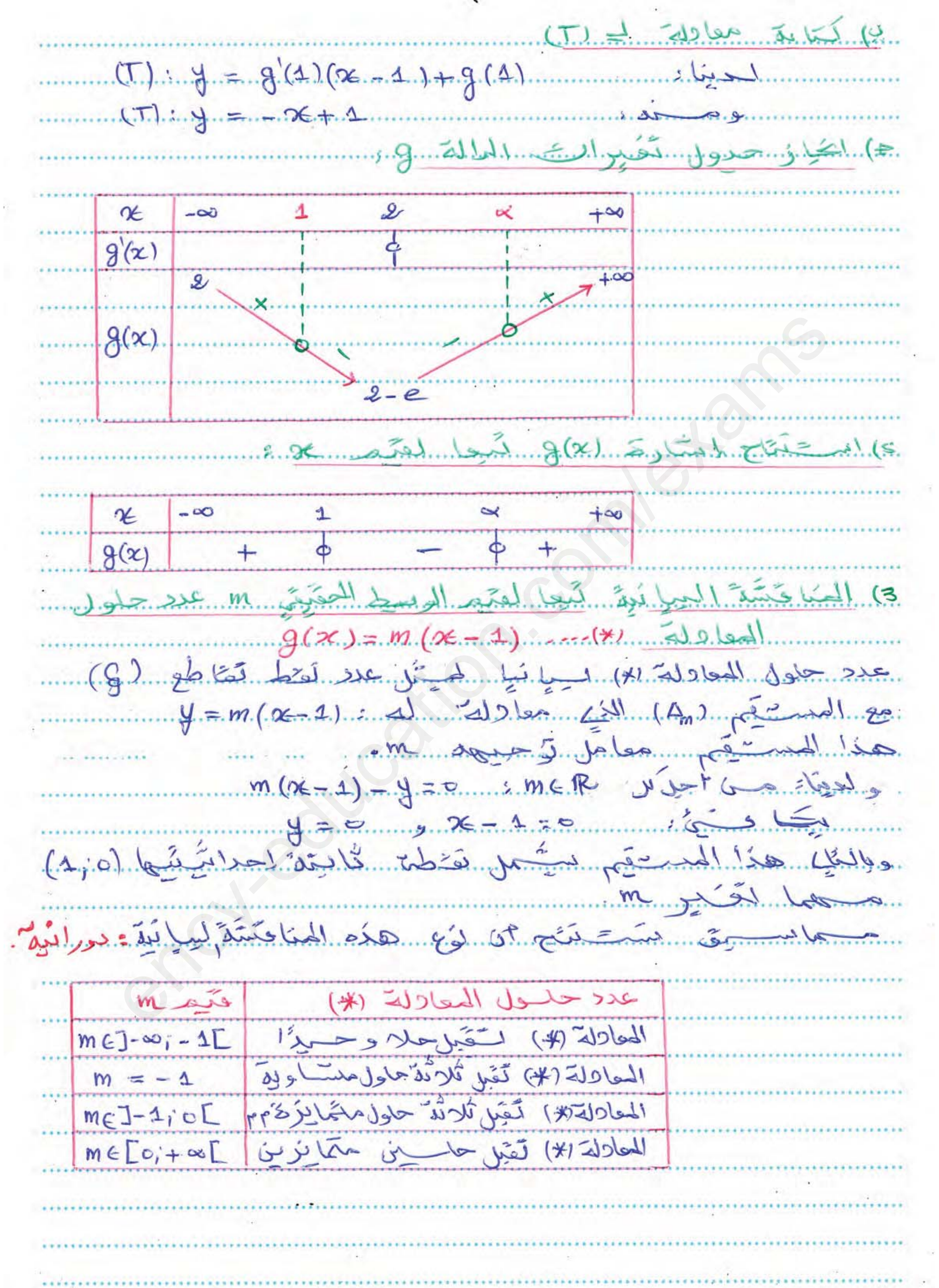
بما أن: $\begin{cases} A(1;0) \in (T) \\ B(-1;2) \in (T) \end{cases}$ فإن: $g'(1) = \frac{2-0}{-1-1} = -1$

- $g'(2) = 0$ لأن (C_g) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 2
- بما أن الدالة g' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا في 1 فإن: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = g''(1)$

وبما أن (T) يخترق (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1 فإن هذه النقطة نقطة انعطاف لـ (C_g) ينتج عن ذلك أن: $g''(1) = 0$.

وبالتالي:

$$\lim_{x \to 1} \frac{g'(x)-g'(1)}{x-1} = 0$$



ب) كتابة معادلة لـ (T)

لدينا: $(T) : y = g'(1)(x-1)+g(1)$

ومنه: $(T) : y = -x+1$

جـ) انجاز جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	2	↘	0	↘	$2-e$	↗	0	↗	$+\infty$

د) استنتاج اشارة $g(x)$ تبعا لقيم x:

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) المناقشة البيانية تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $g(x)=m(x-1)$ ....(*)

عدد حلول المعادلة (*) بيانيا تمثل عدد نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته: $y=m(x-1)$

هذا المستقيم معامل توجيهه m.

ولدينا: من أجل $m\in\mathbb{R}$: $m(x-1)-y=0$

يكافئ: $x-1=0$ و $y=0$

وبالتالي هذا المستقيم يشمل نقطة ثابتة احداثيتيها $(1;0)$ مهما اختير m.

مما سبق نستنتج أن نوع هذه المناقشة البيانية: دورانية.

قيم m	عدد حلول المعادلة (*)
$m\in]-\infty;-1[$	المعادلة (*) تقبل حلا وحيدا
$m=-1$	المعادلة (*) تقبل ثلاثة حلول متساوية
$m\in]-1;0[$	المعادلة (*) تقبل ثلاثة حلول متمايزة
$m\in[0;+\infty[$	المعادلة (*) تقبل حلين متمايزين

الجزء الثاني:

1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم تفسير النتيجتين بيانيا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[(x-4)e^{x-1} + 2x - 1\right]$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

التبرير:

$$\lim_{x\to+\infty} (x-4)e^{x-1} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x-4}{x-1}(x-1)e^{x-1} + 2x - 1\right]$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

التبرير:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} (2x-1) = -\infty$$

التفسير البياني للنتيجتين:

لما أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ فإن (C_f) لا يقبل

مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل عند كل من

$+\infty$ و $-\infty$.

1) ب) إثبات أن (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (2x-1)] = \lim_{x\to-\infty} (x-4)e^{x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x-1}(x-1)e^{x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (2x-1)] = 0$$

التبرير:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} = 0$$

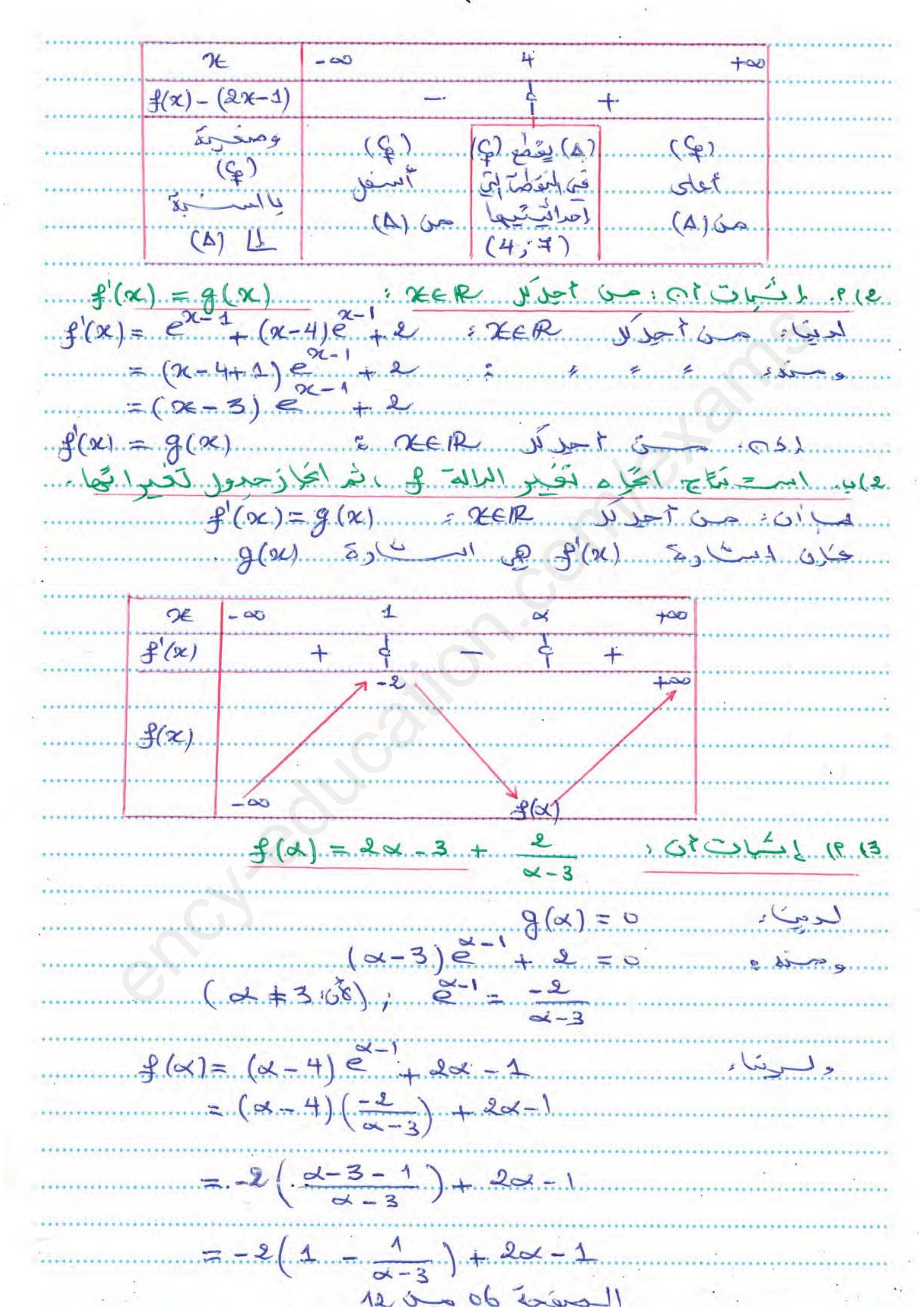
وبالتالي (Δ) م م مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

1) ج) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (2x-1)$

لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - (2x-1) = (x-4)e^{x-1}$

وبالتالي إشارة الفرق هي إشارة $x-4$



x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)-(2x-1)$	$-$	0	$+$
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	(C_f) أسفل من (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثيتيها $(4;7)$	(C_f) أعلى من (Δ)

2) أ. إثبات أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x-1}+(x-4)e^{x-1}+2$

ومنه: " " " : $=(x-4+1)e^{x-1}+2$

$=(x-3)e^{x-1}+2$

إذن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

2) ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة f ، ثم انجاز جدول تغيراتها.

بما أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

فإن اشارة $f'(x)$ هي اشارة $g(x)$

x	$-\infty$	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-2 \searrow$	$f(\alpha) \nearrow$	$+\infty$

3) أ. إثبات أن: $f(\alpha)=2\alpha-3+\dfrac{2}{\alpha-3}$

لدينا: $g(\alpha)=0$

ومنه: $(\alpha-3)e^{\alpha-1}+2=0$

$e^{\alpha-1}=\dfrac{-2}{\alpha-3}$; $(\alpha\neq 3$ لأن$)$

ولدينا: $f(\alpha)=(\alpha-4)e^{\alpha-1}+2\alpha-1$

$=(\alpha-4)\left(\dfrac{-2}{\alpha-3}\right)+2\alpha-1$

$=-2\left(\dfrac{\alpha-3-1}{\alpha-3}\right)+2\alpha-1$

$=-2\left(1-\dfrac{1}{\alpha-3}\right)+2\alpha-1$

ومنه: $f(\alpha) = 2\alpha - 3 + \dfrac{2}{\alpha - 3}$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:

نضع: من أجل $\alpha \in]2,5 ; 2,6[$ ؛ $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$

ومنه: $\varphi'(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{(\alpha-3)^2}$

$$= 2\left[\frac{(\alpha-3)^2 - 1}{(\alpha-3)^2}\right]$$

$$= \frac{2(\alpha-4)(\alpha-2)}{(\alpha-3)^2}$$

بما أن: من أجل كل $\alpha \in]2,5 ; 2,6[$ ، $\varphi'(\alpha) < 0$

فإن الدالة φ متناقصة تماما على $]2,5 ; 2,6[$

وبالتالي:

$\alpha \in]2,5 ; 2,6[$ يستلزم $\varphi(\alpha) \in]\varphi(2,6) ; \varphi(2,5)[$

أي أن:

$f(\alpha) \in]-2,8 ; -2[$

3) ب. إثبات أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $3,5 < \beta < 3,6$

الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[3,5 ; 3,6]$.

وبما أن: $f(3,5) \times f(3,6) < 0$

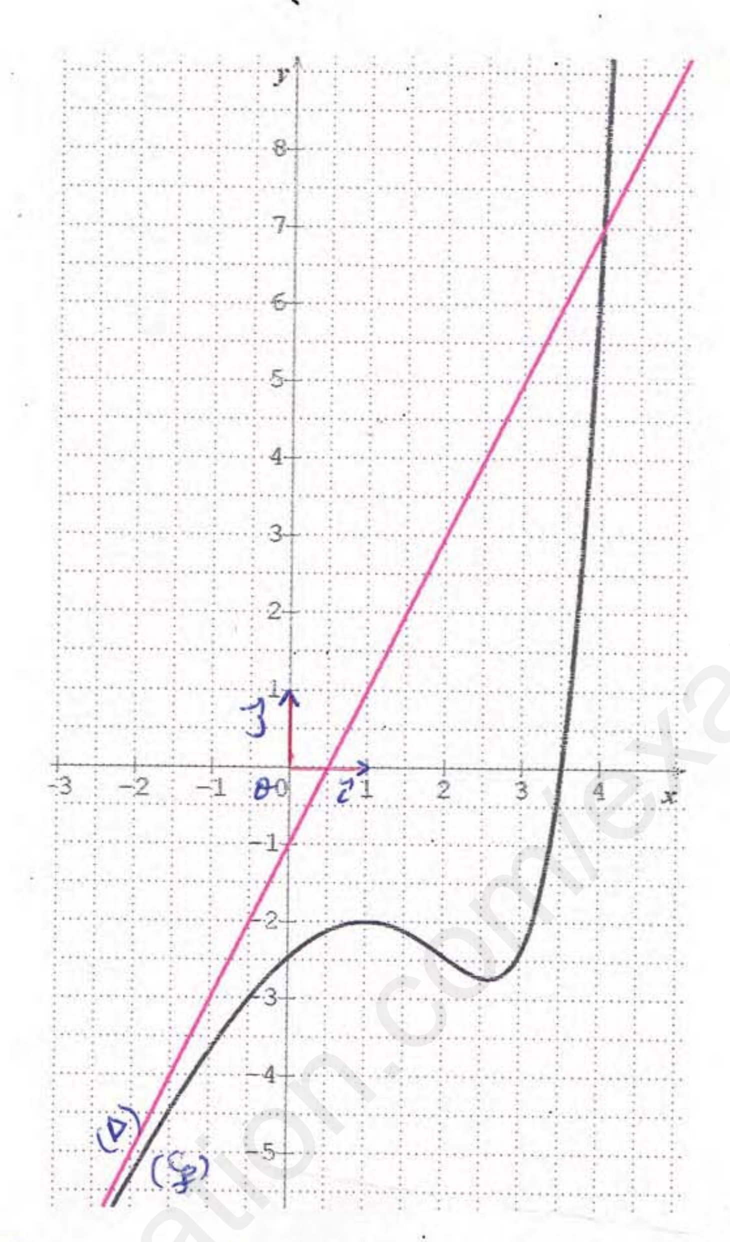
لأن: $f(3,5) \simeq -0,09$ و $f(3,6) \simeq 0,81$

فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]3,5 ; 3,6[$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]3,5 ; 3,6[$

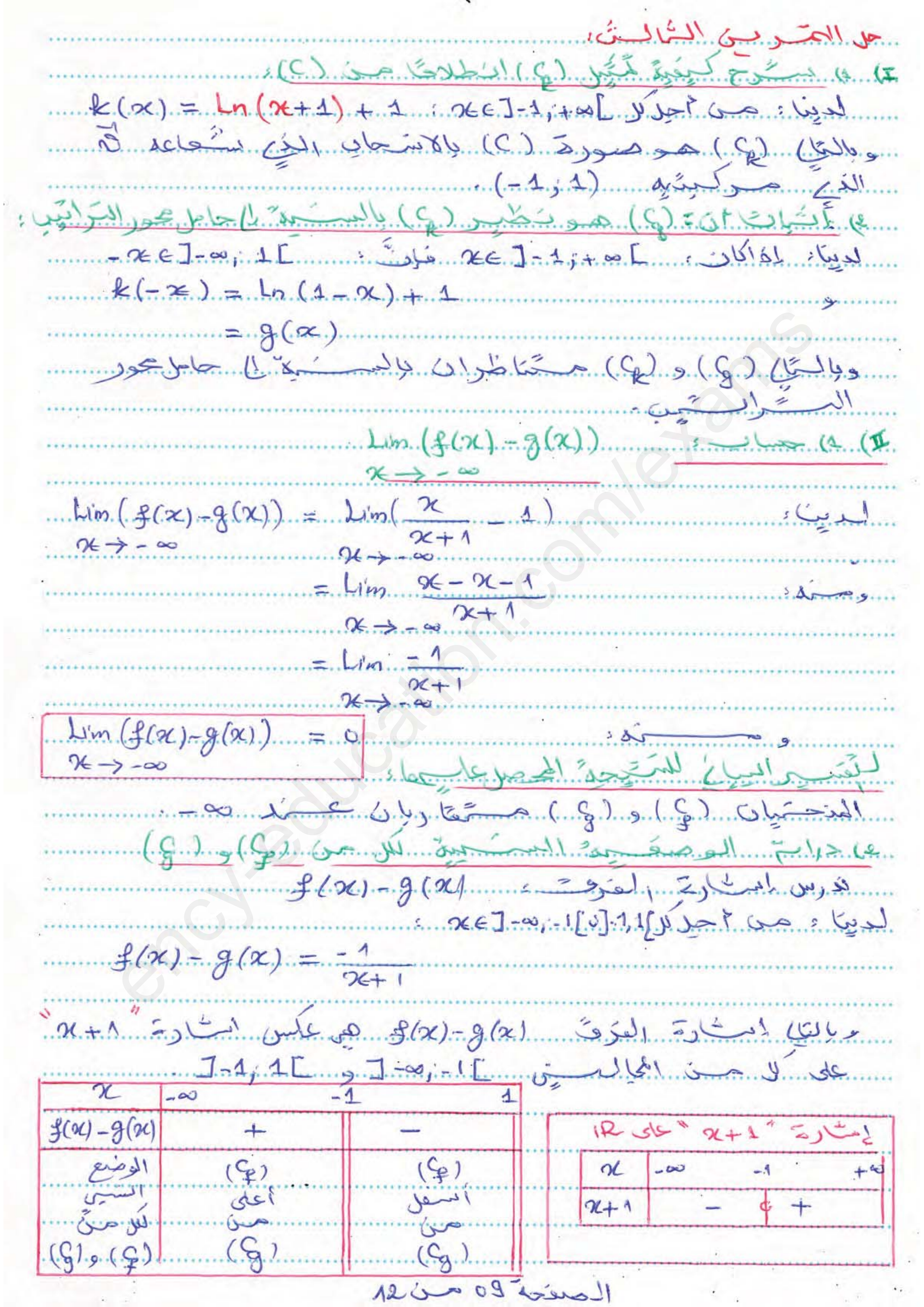
فإن هذا الحل وحيد نرمز له بـ β

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $3,5 < \beta < 3,6$.



التمثيل البياني لـ (Cf) وإنشاء المستقيم (Δ).





حل التمرين الثالث:

I) 1) شرح كيفية تمثيل (C_k) انطلاقا من (C):

لدينا: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $k(x) = Ln(x+1) + 1$

وبالتالي (C_k) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ الذي مركبتيه $(-1;1)$.

2) إثبات أن: (C_g) هو نظير (C_k) بالنسبة لحامل محور التراتيب:

لدينا: إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $-x\in]-\infty;1[$

و

$$k(-x) = Ln(1-x) + 1$$
$$= g(x)$$

وبالتالي (C_g) و (C_k) متناظران بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

II) 1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1} - 1\right)$$

ومنه:

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x-x-1}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x+1}$$

ومنه:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(f(x)-g(x)) = 0}$$

التفسير البياني للنتيجة المحصل عليها:

المنحنيان (C_f) و (C_g) متقاربان عند $-\infty$.

ب) دراسة الوضعية النسبية لكل من (C_f) و (C_g)

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-g(x)$

لدينا: من أجل كل $x\in]-\infty;-1[\cup]-1,1[$:

$$f(x)-g(x) = \frac{-1}{x+1}$$

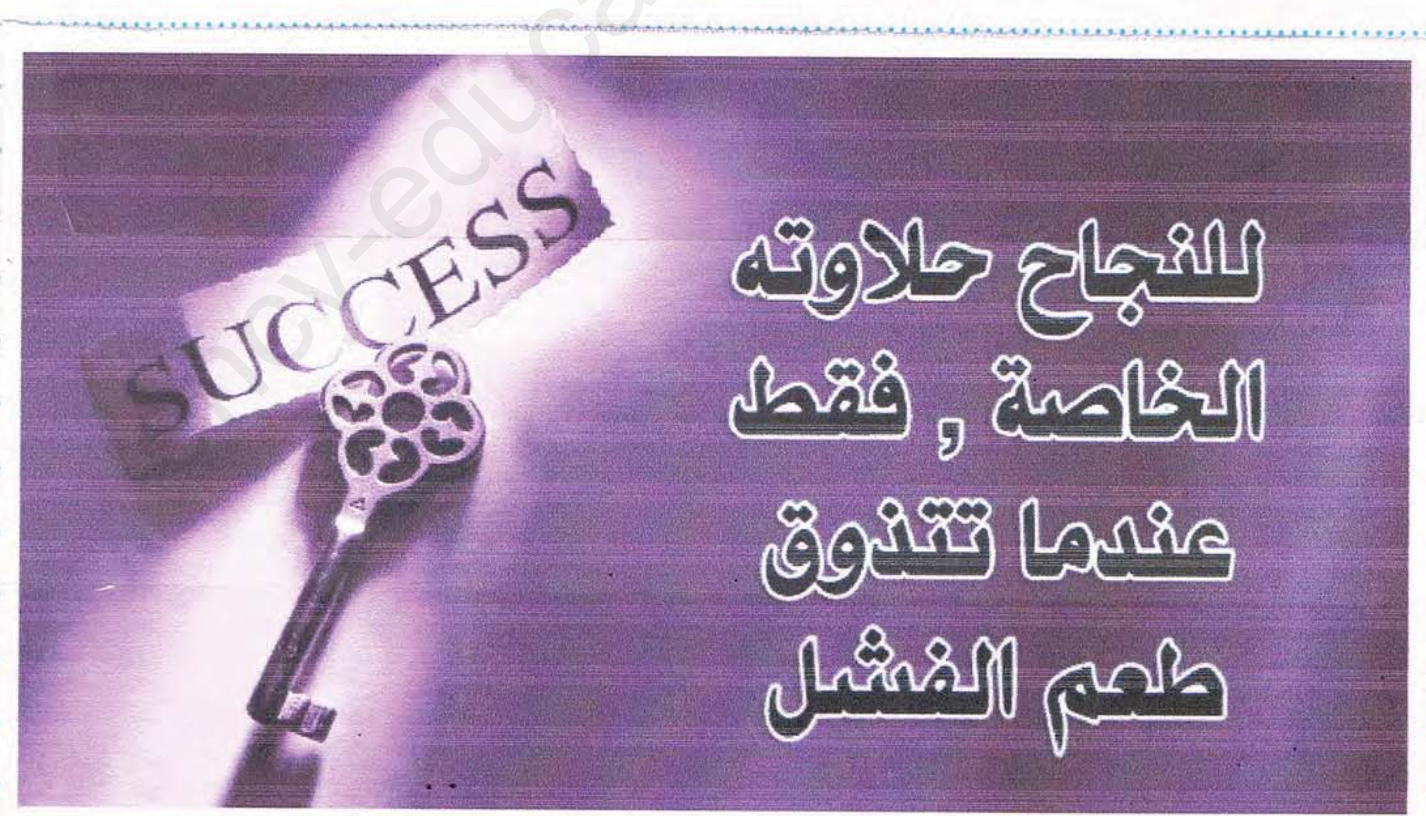
وبالتالي إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ هي عكس إشارة "$x+1$" على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;1[$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 1
$f(x)-g(x)$	$+$	$-$
الوضع النسبي لكل من (C_f) و (C_g)	(C_f) أعلى من (C_g)	(C_f) أسفل من (C_g)

إشارة "$x+1$" على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ $+\infty$
$x+1$	$-$ $\quad$ 0	$+$

3) التمثيل البياني لـ (C_g):



(VII)

4) حساب نهايات الدالة h عند الأطراف المفتوحة لمجالات مجموعة تعريفها:

• لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \end{cases}$ فإن حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$

• لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \end{cases}$ فإن حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

• لدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1}{x} = -1$

وإذا كان: $x < -1$ فإن: $\frac{1}{x} > -1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$

فإن: حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين:

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} h(x) = -\infty$

• لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x} = -1$

وإذا كان: $x > -1$ فإن: $\frac{1}{x} < -1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = +\infty$

فإن: حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x) = +\infty$

• لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ فإن حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = +\infty$

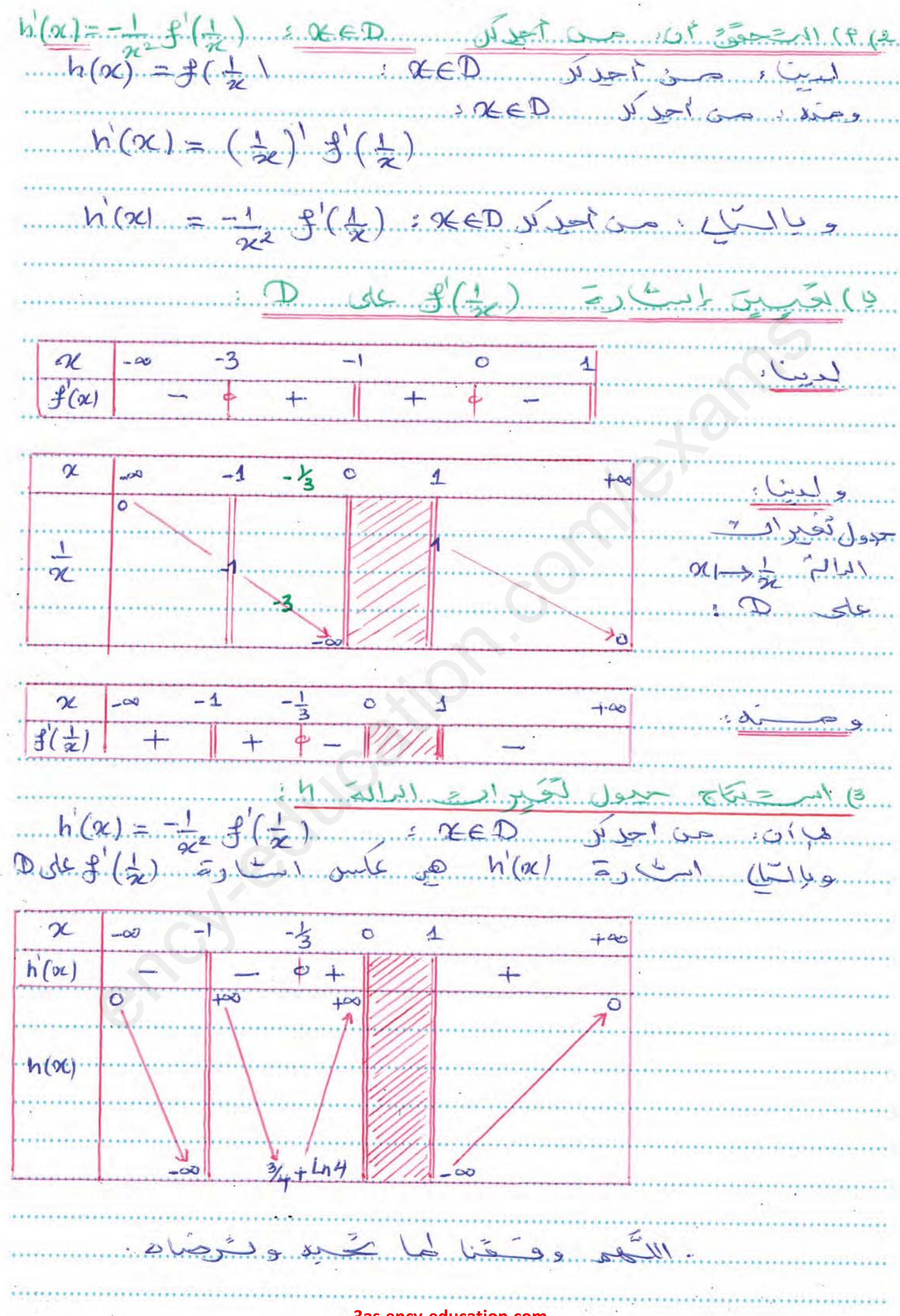
• لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x} = 1$

وإذا كان: $x > 1$ فإن: $\frac{1}{x} < 1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$

فإن: حسب مبرهنة نهاية مركب دالتين:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} h(x) = -\infty$



ج) 2) التحقق أنه: من أجل $x \in D$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا: من أجل $x \in D$: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه: من أجل $x \in D$:

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

وبالتالي: من أجل $x \in D$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

ب) تعيين إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ على D :

لدينا:

x	$-\infty$		-3		-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||

ولدينا: جدول تغيرات الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على D :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	-1 ↘	-3 ↘	$-\infty$ || /////	|| 1 ↘	0

ومنه:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	||	$+$	0	$-$	/////		||	$-$	

3) استنتاج جدول تغيرات الدالة h :

بما أنه: من أجل $x \in D$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

وبالتالي إشارة $h'(x)$ هي عكس إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ على D

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	/////		||	$+$	
$h(x)$	0 ↘		$-\infty$ || $+\infty$ ↘		$\frac{3}{4}+\ln 4$	↗	$+\infty$ /////		|| $-\infty$	↗	0

اللهم وفقنا لما تحبه وترضاه.